# Die Schnittkurve eines elliptischen und eines kubisch-parabolischen Zylinders

## Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät der Universität Bern

zur

**Erlangung der Doktorwürde**

vorgelegt von

ERNST RÖTHLISBERGER

von

Lauperswyl (Bern)

---

Von der philosophischen Fakultät auf Antrag des Herrn Prof. Dr. **G. Huber** angenommen.

**Bern**, den 14. Juni 1919

Der Dekan:

Prof. Dr. **Otto Schultheß**

**Leipzig**
Spamersche Buchdruckerei
1919

# Die Schnittkurve eines elliptischen und eines kubisch-parabolischen Zylinders

## Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät der Universität Bern

zur

**Erlangung der Doktorwürde**

vorgelegt von

ERNST RÖTHLISBERGER

von

Lauperswyl (Bern)

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Von der philosophischen Fakultät auf Antrag des Herrn Prof. Dr. **G. Huber** angenommen.

Der Dekan:

**Bern,** den 14. Juni 1919

Prof. Dr. **Otto Schultheß**

**Leipzig**
Spamersche Buchdruckerei
1919

Meiner lieben Mutter
in Dankbarkeit gewidmet

# Inhaltsübersicht.

## I. Abschnitt.

### Die Raumkurve.


§ 1. Definition und Gleichungen der Raumkurve . . . . . 5
§ 2. Die Bogenlänge und die Tangenten der Raumkurve . . . . . 13
§ 3. Das charakteristische Dreikant . . . . . 18
§ 4. Die Krümmungen der Raumkurve . . . . . 28
Die erste Krümmung . . . . . 28
Die Torsion, die Gesamtkrümmung und die Schmiegungskugel . 31
§ 5. Die Charaktere der Raumkurve . . . . . 33


## II. Abschnitt.

### Die abwickelbare Tangentenfläche.


§ 6. Aufstellung und Diskussion der Gleichung der Tangentenfläche in rechtwinkligen Koordinaten . . . . . 39
§ 7. Die Parameterdarstellung der Tangentenfläche . . . . . 41
§ 8. Die Parameterlinien $v = \text{konst.}$ . . . . . 42
Die Projektionen auf die Koordinatenebenen . . . . . 43
Die Gleichungen der Projektionskurven in rechtwinkligen Koordinaten . . . . . 64
§ 9. Die Schnitte der Tangentenfläche mit den Koordinatenebenen. . . 68
§ 10. Der Asymptotenkegel . . . . . 91
§ 11. Die Doppelkurven der Tangentenfläche . . . . . 98
Die Doppelkurve in der Ebene $E_1$ . . . . . 102
Die Doppelkurve n der Ebene $E_2$ . . . . . 111
Zusammenfassung . . . . . 114

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548209_0065

I. Abschnitt.

# Die Raumkurve.

## § 1. Definition und Gleichungen der Raumkurve.

Der Durchschnitt der beiden Zylinder, des elliptischen

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

und des kubisch-parabolischen

$$z = ky^3$$

ist eine *Raumkurve 6. Ordnung*, bestehend aus einer in sich geschlossenen, gewundenen Kurve und einem unendlich fernen isolierten vierfachen Punkte, deren Eigenschaften im folgenden untersucht werden sollen.

Von den beiden erzeugenden Flächen seien nachstehende Beziehungen hervorgehoben:

*Der elliptische Zylinder* steht senkrecht auf der $xy$-Ebene; seine Erzeugenden verlaufen alle parallel der $z$-Achse. Er schneidet die unendlich ferne Ebene $E_\infty$ des Raumes in den beiden imaginären Geraden

$$y = \frac{b}{a} i \cdot x, \qquad \text{bzw.} \qquad y = -\frac{b}{a} i \cdot x,$$

welche den unendlich fernen Punkt der $z$-Achse gemeinsam haben. Letzterer ist also ein reeller Doppelpunkt des erzeugenden elliptischen Zylinders.

Beim *kubisch-parabolischen Zylinder* sind die Erzeugenden parallel der $x$-Achse und stehen senkrecht auf der $yz$-Ebene. Die $xy$-Ebene $z = 0$ ist Wendetangentialebene; sie berührt den Zylinder längs der $x$-Achse als Wendegeraden. $E_\infty$ ist Rückkehrtangential-

ebene und berührt den kubischen Zylinder längs der durch den unendlich fernen Punkt der $z$-Achse der kubischen Parabel $z = ky^3$ parallel der $x$-Achse gehenden Zylindererzeugenden.

Die beiden erzeugenden Flächen haben somit den unendlich fernen Punkt der $z$-Achse gemeinsam. Dieser ist ein *konischer Doppelpunkt* des elliptischen und ein *uniplanarer* des kubischen Zylinders. Er zählt daher als *vierfacher Punkt der gemeinschaftlichen Schnittkurve.*

Außer diesem vierfachen unendlich fernen Punkt der $z$-Achse besteht der gemeinschaftliche Durchschnitt aus einer in sich geschlossenen, symmetrisch zum Nullpunkt und der $yz$-Ebene gebauten Raumkurve. Zu ihrer Untersuchung ist die Verwendung einer Parameterdarstellung vorteilhaft. Bezeichnet man mit $u$ *die exzentrische Anomalie* der in der $xy$-Ebene liegenden Schnittellipse des elliptischen Zylinders, *der Grundellipse*, so gehen die bisherigen Gleichungen der Kurve:

$$\left.\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ z &= ky^3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wo $a$ und $b$ die große und kleine Halbachse der Grundellipse und $k$ den Parameter der kubischen Parabel, der Leitlinie des kubisch-parabolischen Zylinders in der $yz$-Ebene, bedeuten, über in die *Gleichungen der Raumkurve in Parameterform*:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u \\ y &= b\sin u \\ z &= b^3k\sin^3 u \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Durchläuft der Parameterwinkel $u$ alle Werte von $0°$—$360°$, so erhält man sämtliche Punkte der Raumkurve. Diese liegt ausschließlich im 1., 2., 7. und 8. Oktanten des unseren Untersuchungen zugrunde gelegten rechtwinkligen Koordinatensystems.

Zwei Punkte, deren Parameterwinkel supplementär sind, denen also die Parameterwerte $u$, bzw. $(180° - u)$ zukommen, besitzen Koordinaten, welche sowohl dem absoluten Werte als auch dem Vorzeichen nach gleich groß sind, mit Ausnahme der Koordinate $x$, bei der nur das Vorzeichen geändert wird, d. h. *die Kurve liegt symmetrisch in bezug auf die yz-Ebene.*

Für die Parameterwerte $u$ und $(180° + u)$ erhalten alle Koordinaten absolut gleich große, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte

Werte. *Die Kurve ist also symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt gebaut.*

Aus der Parameterdarstellung (2) folgt, daß, wenn $u$ von $0°$—$360°$ geht, für die Koordinaten der Kurvenpunkte stets

$$|x| \leqq a, \qquad |y| \leqq b, \qquad |z| \leqq b^3 k$$

ist. D. h. die Schnittkurve der beiden Flächen ist eine *im Endlichen liegende, geschlossene Raumkurve*, die innerhalb des von den 3 Ebenenpaaren

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b, \qquad z = \pm b^3 k$$

begrenzten Parallelepipedons liegt.

Die beiden Kurvenpunkte, welche man erhält als Durchstoßpunkte der Erzeugenden des elliptischen Zylinders in den Scheiteln der großen Achse der Grundellipse mit der Wendeerzeugenden des kubischen Zylinders, nennen wir die *Scheitel der Raumkurve.* Sie liegen auf der $x$-Achse in den Entfernungen $x = \pm a$, dem Maximal- und Minimalwert von $x$. Es sind die Punkte

$$S_1(a, 0, 0) \qquad \text{und} \qquad S_2(-a, 0, 0).$$

Sie entsprechen den Parameterwinkeln $u = 0°$ bzw. $u = 180°$.

Als *Pole der Raumkurve* bezeichnen wir die zwei Punkte

$$B_1(0, b, b^3 k) \qquad \text{und} \qquad B_2(0, -b, -b^3 k),$$

welche zu den Parameterwerten $u = 90°$, bzw. $u = 270°$ gehören. Sie liegen in der $yz$-Ebene und ihre beiden von Null verschiedenen Koordinaten sind absolute Maximalwerte von $y$ und $z$. In diesen Punkten verläßt der kubische Zylinder den elliptischen und verläuft ganz außerhalb desselben, so daß ihre Durchschnittskurve imaginär wird.

Eine andere Parameterform, welche die Vieldeutigkeit der trigonometrischen Funktionen des Winkels $u$ umgeht und daher für mehrere Untersuchungen zweckmäßiger ist, ergibt sich einfach dadurch, daß wir die Ordinate $y$ als unabhängigen Parameter $v$ einführen: $y = v$. Dann wird die *neue Parameterdarstellung* der Raumkurve:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - v^2} \\ y &= v \\ z &= k v^3 \end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

Variiert der Parameter $v$ von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man sämtliche Kurvenpunkte. Sie werden aber nur reell, wenn

$$|v| \leqq b\,.$$

Einem Parameterwerte $v$ entsprechen immer zwei Raumkurvenpunkte, die in bezug auf die $yz$-Ebene symmetrisch zueinander liegen.

Die Gleichungen der *Projektionen der Raumkurve auf die Koordinatenebenen* werden durch je zwei der Parametergleichungen (2) dargestellt.

Die Projektionen auf die $xy$- bwz. $yz$-Ebene sind: die Ellipse:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

*die Grundellipse* des gegebenen elliptischen Zylinders (Fig. IV) bzw. die kubische Parabel

$$z = ky^3,$$

oder in Parameterform:

$$\left.\begin{aligned} y &= b\sin u; \qquad z = b^3k\sin^3 u, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

*die Grundkurve des gegebenen kubisch-parabolischen Zylinders* (Fig. VI), die im unendlich fernen Punkte der $z$-Achse eine Spitze hat.

Weil die $yz$-Ebene Symmetrieebene der Raumkurve ist, so fallen im vorliegenden Seitenriß die Projektionen je zweier Punkte der Raumkurve zusammen. Dieser ist daher *doppelt gelegte Projektionskurve*. Dasselbe Resultat folgt auch aus oben stehenden Parametergleichungen: für je zwei verschiedene Parameterwinkel

$$(90^0 + u) \text{ und } (90^0 - u) \quad \text{oder:} \quad (270^0 + u) \text{ und } (270^0 - u)$$

erhalten die Koordinaten die gleichen Werte; jeder Punkt der Projektionskurve zählt daher als Doppelpunkt. Den Reihen der Parameterwinkel von 0°—90° und 90°—180°, ebenso denjenigen von 180°—270° und 270°—360° entspricht je dieselbe Punktfolge. Mit wachsendem Parameter wird somit die Projektionskurve doppelt durchlaufen.

Für $u = 0°$ fallen die zwei verschiedenen Parameterwerte in den Punkten $B_1(u = 90°)$ und $B_2(u = 270°)$, den beiden Polen der Raumkurve, zusammen. Nach den Parametergleichungen (3), aus welchen folgt, daß für reelle Werte des Parameterwinkels $u$ stets

$$|y| \leqq b, \qquad |z| \leqq b^3k$$

sein muß, besitzen diese Punkte die Extremwerte der Koordinaten. Somit ist nur das zwischen den Polen liegende Kurvenstück die doppelt gelegte Projektion der reellen Raumkurve auf die $yz$-Ebene; außerhalb derselben ist die Durchschnittskurve der beiden Zylinder imaginär.

*Die Projektion der Raumkurve auf die xz-Ebene* wird dargestellt durch die Parametergleichungen

$$x = a \cos u, \qquad z = b^3 k \sin^3 u . \tag{4}$$

Darnach sind die Koordinaten der Kurvenpunkte nur reell, wenn

$$x \leqq a, \qquad z \geqq b^3 k .$$

Diese Projektionskurve besteht also aus einem in sich geschlossenen Blatt, welches von dem durch die Geradenpaare $x = \pm a$ , $z = \pm b^3 k$ gebildeten Rechtecke eingeschlossen wird (Fig. V).

Ihre Darstellung in kartesischen Koordinaten erhält man am einfachsten, wenn man den Wert für $y$ aus der zweiten Gleichung (1): $y = \left(\frac{z}{c}\right)^{1/3}$ in der ersten derselben einführt. Dann wird ihre Gleichung:

$$a^6 z^2 = b^6 k^2 (a^6 - 3a^4 x^2 + 3a^2 x^4 - x^6) = b^6 k^2 (a^2 - x^2)^3. \tag{4a}$$

Die Vertikalprojektion ist also, entsprechend der Ordnung der Raumkurve, vom 6. Grade, und besteht aus vier kongruenten symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen gebauten und in den 4 Quadranten des Koordinatensystems liegenden Teilen.

*Ihre 6 Asymptotenrichtungen*:

$$x^6 = 0, \qquad x = 0, \quad 6\,\text{fach},$$

fallen mit der Richtung der $z$-Achse zusammen. Zur Untersuchung des unendlich fernen Punktes in dieser Richtung projizieren wir ihn in den Nullpunkt vermittels der Substitutionen:

$$z = \frac{1}{z'}; \qquad x = \frac{x'}{z'} .$$

Wir erhalten dann als transformierte Kurvengleichung:

$$a^6 z'^4 = b^6 k^2 (a^2 z'^2 - x'^2)^3.$$

Der neue Ursprung ist somit ein vierfacher Punkt. Seine 4 Tangenten ergeben sich aus

$$a^6 z'^4 = 0; \qquad z' = 0, \quad 4\,\text{fach};$$

sie fallen demnach in der $x'$-Achse zusammen. Setzt man diesen Wert für $z'$ in die transformierte Kurvengleichung ein, so entsteht

$$x'^6 = 0, \qquad x' = 0, \quad 6\,\text{fach}.$$

Die Tangente schneidet somit die Kurve im vierfachen Punkte in 6 zusammenfallenden Punkten. Rückwärts transformiert ergibt sich als Gleichung dieser Tangente:

$$z = \infty .$$

D. h. entsprechend dem isolierten vierfachen unendlich fernen Punkte der Raumkurve besitzt die vorliegende Projektionskurve in der Richtung der $z$-Achse einen *unendlich fernen vierfachen Punkt*. Seine 4 Tangenten fallen in der unendlich fernen Geraden zusammen. Diese ist die einzige reelle Asymptote und schneidet die Kurve in ihm in 6 zusammenfallenden Punkten.

*Der Schnitt der Kurve mit der x-Achse* ergibt die beiden Punkte $S_1(a, 0)$ und $S_2(-a, 0)$, also die Scheitel der Raumkurve, deren Abszissen absolute Maximalwerte sind. Sie sind *Spitzen mit der x-Achse als gemeinschaftlicher Spitzentangente*, wie sich sofort aus den in sie transformierten Kurvengleichungen ergibt.

*Die Schnittpunkte mit der z-Achse* weisen die Extremwerte der Ordinaten auf: $z = \mp b^3 k$. Sie sind Kulminationspunkte der Kurve mit den zur $x$-Achse parallelen Geraden

$$z = b^3 k \quad \text{bzw.} \quad z = -b^3 k$$

als Tangenten.

Zur Bestimmung der *Wendepunkte* bilden wir die beiden ersten Ableitungen der Koordinaten nach dem Parameter $u$:

$$\frac{dx}{du} = -a \sin u \qquad \frac{dz}{du} = 3b^3 k \sin^2 u \cos u$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = -a \cos u \qquad \frac{d^2z}{du^2} = 3b^3 k \sin u\,(2 - 3 \sin^2 u).$$

Die bekannte Bedingungsgleichung für die Parameter der Wendepunkte:

$$\frac{dx}{du}\frac{d^2z}{du^2} - \frac{dz}{du}\frac{d^2x}{du^2} = 0$$

erhält im vorliegenden Fall die Form:

$$\sin^2 u\,(2 \sin^2 u - 1) = 0 .$$

Daraus folgt: 1.) $\sin u = 0$, also $u = 0°$ und $u = 180°$. Dies sind die Parameterwinkel der beiden Scheitel, der Spitzen der Projektionskurve.

$$2.) \quad 2\sin^2 u - 1 = 0, \qquad \sin u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Dieser Beziehung genügen die Parameterwinkel

$$u = 45°, \quad 135°, \quad 225° \quad \text{und} \quad 315°.$$

Der Aufriß der Raumkurve besitzt somit *4 reelle, symmetrisch zu den Achsen liegende Wendepunkte* mit den Koordinaten:

$$x = \pm\frac{a}{2}; \qquad z = \pm\frac{b^3k}{4}.$$

Sie sind die Projektionen derjenigen Punkte der Raumkurve, deren Koordinaten die Werte zukommen

$$x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}; \qquad y = \pm\frac{b\sqrt{2}}{2}; \qquad z = \pm\frac{b^3k\sqrt{2}}{2}.$$

Da die Tangenten der Projektionskurven die Projektionen der bezüglichen Tangenten der Raumkurve sind, und weil ferner in der Wendetangente zwei aufeinanderfolgende Tangenten zusammenfallen, so müssen die Schmiegungsebenen der entsprechenden Raumkurvenpunkte im vorliegenden Falle auf der $xz$-Ebene senkrecht stehen, da sie ebenfalls je 2 konsekutive Tangenten der Raumkurve enthalten. Die Tangenten der oben genannten 4 *Wendepunkte* $W_1$, $W_2$, $W_3$, $W_4$, von denen diejenige des Punktes $W_1 (u = 45°)$ durch die Gleichung

$$3b^3kx + 2az - 2ab^3k\sqrt{2} = 0 \tag{5}$$

dargestellt ist, sind somit identisch mit den in der $xz$-Ebene liegenden Spurgeraden der entsprechenden Schmiegungsebenen.

Da die Koordinaten der Projektionskurve auf die $xz$-Ebene durch rationale Funktionen von trigonometrischen Funktionen ausgedrückt werden konnten, ist diese eine *rationale Kurve 6. Ordnung* und besitzt die Maximalzahl der Doppelpunkte: 10. Ein vierfacher Punkt ist nun im allgemeinen 6 gewöhnlichen Doppelpunkten äquivalent. Weil aber ein Selbstberührungsknoten, in welchem die den beiden sich berührenden Kurvenzweigen gemeinschaftliche Tangente 4 Punkte mit der Kurve gemeinsam hat, für

2 Doppelpunkte zählt, und weil ferner die vierfach gelegte Tangente $g_\infty$ des unendlich fernen vierfachen isolierten Punktes in der Richtung der $z$-Achse die vorliegende Kurve in ihm nicht nur in 5, sondern in 6 Punkten schneidet, so muß in der äquivalenten Zahl der Doppelpunkte paarweise für je 2 zusammenfallende Tangenten ein gewöhnlicher Doppelpunkt durch einen Selbstberührungsknoten ersetzt werden. Demnach erhöht sich in unserem Falle die dem unendlich fernen vierfachen Punkte entsprechende Zahl von Doppelpunkten um 2; dieser ist somit 8 Doppelpunkten gleichwertig. Dazu kommen noch die beiden Spitzen in den Scheiteln $S_1$ und $S_2$. so daß sämtliche Doppelpunkte des Aufrisses der Raumkurve reell sind.

Mit Hilfe der Parametergleichungen (3) läßt sich *die Quadratur der Projektionskurve* auf einfache Weise ausführen. Da die ganze von der Kurve eingeschlossene Fläche $F$ viermal größer ist als das im ersten Quadranten liegende, von den Abszissen $x = 0$ und $x = a$ begrenzte Flächenstück, so wird sie:

$$F = 4\int_0^a z\,dx.$$

Nun ist: $x = a\cos u$; $dx = -a\sin u\,du$; $z = b^3 k \sin^3 u$.

Grenzen:

| $x$ | 0 | $a$ |
|---|---|---|
| $u$ | $\frac{\pi}{2}$ | 0 |

Durch Substitution dieser Werte in obigen Ausdruck für $F$ folgt:

$$F = -4ab^3k\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 u\,du = 4ab^3k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,du.$$

Unter Anwendung partieller Integrationen liefert die Auswertung dieses Integrals:

$$F = \frac{3}{4}ab^3k\pi = \frac{3}{4}b^2k\cdot ab\pi.$$

d. h. die von der Vertikalprojektion der Raumkurve eingeschlossene Fläche ist um den Betrag $\frac{3}{4}b^2k$ mal größer als das von der Grundfläche des erzeugenden elliptischen Zylinders begrenzte Flächenstück.

## § 2. Die Bogenlänge und die Tangenten der Raumkurve.

Zur Berechnung der *Bogenlänge der Raumkurve* bestimmen wir zunächst ihr Bogenelement, welches nach der Theorie analytisch gegeben ist durch die Formel:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}.$$

In unserem Falle wird:

$$\frac{dx}{du} = -a \sin u; \qquad \frac{dy}{du} = b \cos u; \qquad \frac{dz}{du} = 3b^3 k \sin^2 u \cos u .$$

Setzt man diese Werte in obigen Ausdruck ein, so folgt für *das Bogenelement*:

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u (1 + 9b^4 k \sin^4 u)}\, du = R \cdot du , \qquad (6)$$

wenn wir zur Abkürzung die Wurzel mit $R$ bezeichnen.

*Die Bogenlänge $s$ der Raumkurve*, gerechnet vom Scheitel $S_1(u = 0)$ bis zum Punkte $P(u)$ [$u$ positiv im Sinne des wachsenden Parameters] wird nun:

$$s = \int_0^u \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u (1 + 9b^4 k^2 \sin^4 u)}\, du = \int_0^u R(u) du . \qquad (7)$$

Da sich dieses hyperelliptische Integral nicht in geschlossener Form auswerten läßt, wollen wir, um wenigstens ein ungefähres Maß für die Größe des Bogens der Raumkurve zu besitzen, durch eine Näherungsmethode einen Mittelwert desselben bestimmen. Zu diesem Zwecke integrieren wir zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = \frac{\pi}{2}$, welchen Parameterwinkeln der Scheitel $S_1(u = 0°)$ und der Pol $B_1(u = 90°)$ entsprechen, und erhalten für die Länge des vierten Teiles des Kurvenbogens:

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(u) du = M \frac{\pi}{2} ,$$

wenn der Mittelwert $M$ die Bedeutung hat:

$$M = R\left(0 + \vartheta \cdot \frac{\pi}{2}\right) = R\left(\vartheta \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{wo} \quad 0 < \vartheta < 1 .$$

Wählen wir $\vartheta = \frac{1}{2}$, so entsteht

$$M = R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \cdot \frac{4 + 9b^4k^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2 + b^2(4 + 9b^4k^2)}{2}}.$$

Somit erhalten wir als *angenäherten Wert für die Bogenlänge der ganzen geschlossenen Raumkurve*:

$$s = \pi\sqrt{\frac{4(a^2 + b^2) + 9b^6k^2}{2}}.$$

Aus der Definition der *Tangente*, wonach sie die Verbindungslinie zweier unendlich benachbarter Punkte der Raumkurve ist, ergeben sich für ihre Richtungskosinusse die Beziehungen:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{du} : \frac{ds}{du}; \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du} : \frac{ds}{du};$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{du} : \frac{ds}{du},$$

wo dem nach $u$ genommenen *Differentialquotienten des Bogenelementes*, der für die folgenden Untersuchungen besonders wichtig ist, nach (6) der Wert zukommt:

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u(1 + 9b^4k^2 \sin^4 u)} = R.$$

Durch Einführung unserer besonderen Werte in obige 3 Gleichungen ergeben sich für *die Richtungskosinusse der Tangenten* die Größen:

$$\cos\alpha = -\frac{a \sin u}{R}; \quad \cos\beta = \frac{b \cos u}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{3b^3k \sin^2 u \cos u}{R}. \quad (8)$$

Bedeuten $x$, $y$, $z$ die laufenden Koordinaten, so lautet die *Doppelgleichung der Tangente* im Punkte $P(x_0y_0z_0)$ vom Parameterwinkel $u$:

$$\frac{x - x_0}{-a \sin u} = \frac{y - y_0}{b \cos u} = \frac{z - z_0}{3b^3k \sin^2 u \cos u},$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (2):

$$\frac{x - a \cos u}{-a \sin u} = \frac{y - b \sin u}{b \cos u} = \frac{z - b^3k \sin^3 u}{3b^3k \sin^2 u \cos u}. \quad (9)$$

Die Tangente ist schon durch zwei dieser Gleichungen bestimmt, z. B. durch den Grund- und Aufriß:

$$\left\{\begin{aligned} y &= -\frac{b\cos u}{a\sin u}x + \frac{b}{\sin u} \\ z &= -\frac{3b^3k}{a}\sin u\cos u\cdot x + b^3k\sin u(1+2\cos^2 u) \end{aligned}\right. \tag{9a}$$

In den beiden Scheiteln $S_1(u=0°)$ und $S_2(u=180°)$ der Raumkurve erhalten die Tangenten bzw. die Gleichungen:

$$x = \pm a; \qquad z = 0.$$

Sie liegen in der $xy$-Ebene und verlaufen parallel zur $y$-Achse im Abstande $a$ von ihr; sie fallen also zusammen mit den Tangenten in den Scheiteln der großen Achse der Grundellipse.

Den Tangenten in den beiden Polen $B_1(u=90°)$ und $B_2(u=270°)$ kommen bzw. die Gleichungen zu

$$y = \pm b, \qquad z = \pm b^3k;$$

sie sind parallel der $x$-Achse.

Aus den Gleichungen (8) folgt, daß die Richtungskosinusse der Tangenten zweier Punkte, welche symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt liegen, denen also die Parameterwinkel $u$ und $(180° + u)$ entsprechen, einander proportional sind, d. h. *die Tangenten in je zwei Punkten der Raumkurve, die in bezug auf den Koordinatenursprung symmetrisch liegen, sind zueinander parallel.* Je zwei solche Tangenten schneiden sich in einem Punkte im Unendlichen, und der geometrische Ort dieser Schnittpunkte ist eine *unendlich ferne Doppel- oder Selbstdurchdringungskurve der abwickelbaren Tangentenfläche der Raumkurve.*

Um allgemein *die Parameterwerte zweier sich schneidenden, aber nicht unendlich benachbarten Tangenten* zu finden, bestimmen wir den Schnittpunkt zweier Tangenten von den Parametern $u$ und $u'$. Die Gleichungen der Tangente im Punkte $P(u)$ lauten nach (9 a):

$$\left\{\begin{aligned} y &= -\frac{b\cos u}{a\sin u}x + \frac{b}{\sin u} \\ z &= -\frac{3b^3k}{a}\sin u\cos u\cdot x + b^3k\sin u(3-2\sin^2 u) \end{aligned}\right. \tag{$\alpha$}$$

Eine zweite Tangente im beliebigen Punkte $P(u')$ ist dargestellt durch:

$$\left\{\begin{aligned} y &= -\frac{b\cos u'}{a\sin u'}x + \frac{b}{\sin u'} \\ z &= -\frac{3b^3k}{a}\sin u\cos u\cdot x + b^3k\sin u'(3-2\sin^2 u') \end{aligned}\right. \qquad (\beta)$$

Wir nehmen nun an, diese Tangente schneide die erste im Punkte $Q\,(x\,,\,y\,,\,z)$. Dann erhält die gemeinschaftliche Abszisse $x$ aus den Gleichungen $(\alpha)$ und $(\beta)$ die Werte:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a(\sin u - \sin u')}{\sin u\cos u' - \cos u\sin u'} \qquad \text{bzw.} \\ x &= \frac{a}{3}\,\frac{\sin u'(3-2\sin^2 u') - \sin u(3-2\sin^2 u)}{\sin u'\cos u' - \sin u\cos u}\,. \end{aligned} \qquad (10)$$

Durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke ergibt sich als Bedingung, daß sich die beiden Tangenten im Punkte $Q(x\,,\,y,\,z)$ schneiden:

$$\frac{\sin u - \sin u'}{\sin u\cos u' - \cos u\sin u'} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin u'(3-2\sin^2 u') - \sin u(3-2\sin^2 u)}{\sin u'\cos u' - \sin u\cos u} \qquad (11)$$

Die Auflösung dieser Gleichung liefert folgende *Wurzelpaare*, wenn von dem rein formalen Ergebnis

$$\sin u' = \sin u, \qquad \cos u' = \cos u$$

abgesehen wird:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ \ \sin u' = \sin u;\quad \cos u' = -\cos u \\ &\text{b)}\ \ \sin u' = -\sin u;\quad \cos u' = -\cos u \\ &\text{c)}\ \ \sin u' = -\frac{1}{2}(\sin u - \sqrt{3}\cos u);\quad \cos u' = \frac{1}{2}(\cos u + \sqrt{3}\sin u) \\ &\text{d)}\ \ \sin u' = -\frac{1}{2}(\sin u + \sqrt{3}\cos u);\quad \cos u' = \frac{1}{2}(\cos u - \sqrt{3}\sin u) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Die erste Bedingung (12 a) ist erfüllt, wenn

$$u' = 180 - u\,.$$

Dies führt zu dem Resultat: *Die beiden Tangenten in zwei Punkten der Raumkurve, die in bezug auf die yz-Ebene symmetrisch liegen,*

*schneiden sich in einem Punkte dieser Koordinatenebene.* Denn die Abszisse des gemeinsamen Schnittpunktes (Gleichung 10) verschwindet für diesen Wert von $u'$. Der geometrische Ort aller dieser Punkte ist eine ebene Kurve in der $yz$-Ebene, längs welcher sich die abwickelbare Tangentenfläche der Raumkurve durchdringt. Sie ist also *eine Doppelkurve* derselben. Man erhält ihre Parametergleichungen auf einfache Weise, indem man in den Tangentengleichungen (9 a) den Wert $x = 0$ setzt. Sie lauten·

$$y = \frac{b}{\sin u}, \qquad z = b^3 k \sin u\,(3 - 2\sin^2 u)\,. \tag{13}$$

Diese Gleichungen stellen eine *doppelt gelegte Kurve 4. Grades* dar, die später untersucht werden soll.

Die Bedingungsgleichungen (12 b) verlangen

$$u' = 180° + u\,.$$

Dies bestätigt unsere obengemachte Aussage, wonach je zwei Tangenten der Raumkurve, deren Berührungspunkte symmetrisch in bezug auf den Koordinatenursprung liegen, zueinander parallel verlaufen und durch ihre im Unendlichen liegenden aufeinanderfolgenden Schnittpunkte *eine unendlich ferne ebene Doppelkurve der Tangentenfläche* erzeugen.

Die Gleichungen (12c) und (12d) bestimmen die Parameterwinkel $u'$ zweier weiterer Tangenten, welche die Tangente vom Parameter $u$ je in einem Punkte schneiden. Wie später gezeigt wird, führen sie auf zwei in bezug auf die $yz$-Ebene symmetrisch zueinander gebaute *ebene Doppelkurven 4. Ordnung der Tangentenfläche,* deren Ebenen, dargestellt durch die Gleichungen

$$y = \frac{b}{a\sqrt{3}}\,x, \qquad \text{bzw.} \qquad y = -\frac{b}{a\sqrt{3}}\,x, \tag{14}$$

sich in der $z$-Achse schneiden.

*Jede Tangente der Raumkurve wird somit von vier anderen, ihr nicht unendlich benachbarten Tangenten geschnitten,* deren Parameterwinkel durch die Gleichungen (12a—d) bestimmt sind. *Auf jeder Tangente liegen daher 4 Punkte der Gesamt-Doppelkurve der abwickelbaren Tangentenfläche.*

Da nun allgemein*) der Satz gilt, daß, wenn $r$ den Rang der Raumkurve oder ihrer Tangentenfläche bedeutet, jede Tangente

*) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, II. Teil, Seite 84.

der Raumkurve oder geradlinige Erzeugende der Tangentenfläche von

$$r - 4$$

anderen, ihr nicht unendlich benachbarten, geschnitten wird, so heißt dies, übertragen auf unseren besonderen Fall, wo $r - 4 = 4$ ist: *der Rang der vorgelegten Raumkurve 6. Ordnung, also die Ordnung ihrer abwickelbaren Tangentenfläche ist*: $r = 8$.

Eine andere Form der Tangentengleichung, welche auf der Verwendung des Parameters $v$ beruht, ist für mehrere Untersuchungen zweckmäßiger. Aus Gleichung (2a) folgt:

$$\frac{dx}{dv} = \mp \frac{av}{b\sqrt{b^2 - v^2}}; \qquad \frac{dy}{dv} = 1; \qquad \frac{dz}{dv} = 3kv^2.$$

Mit Hilfe dieser Differentialquotienten gelangt man zu der *Doppelgleichung der Tangente, ausgedrückt im Parameter v*:

$$\frac{(a\sqrt{b^2 - v^2} \mp bx)\sqrt{b^2 - v^2}}{av} = y - v = \frac{z - kv^3}{3kv^2}. \tag{15}$$

## § 3. Das charakteristische Dreikant.

In jedem Raumkurvenpunkte existieren drei ausgezeichnete Geraden, welche senkrecht aufeinander stehen: Tangente, Hauptnormale und Binormale. Sie bestimmen drei Ebenen: die Schmiegungsebene, Normalebene und rektifizierende Ebene, welche ein dreirechtwinkliges Dreikant, *das Haupttrieder der Raumkurve* in diesem Punkte bilden.

*Die Binormale* eines Kurvenpunktes $P(u)$ steht senkrecht auf den beiden durch ihren Fußpunkt gehenden unendlich benachbarten Tangenten. Aus dieser Bedingung bekommt man für ihre Richtungskosinusse die Werte:

$$\cos\alpha'' = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \qquad \cos\beta'' = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};$$

$$\cos\gamma'' = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

wenn zur Abkürzung

$$X = \frac{dy}{du}\frac{d^2z}{du^2} - \frac{dz}{du}\frac{d^2y}{du^2}$$

und $Y$ und $Z$ entsprechenden Ausdrücken gleichgesetzt wird. In unserem Falle werden nun die Richtungskosinusse der Binormalen:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha'' &= \frac{6b^4k\sin u\cos^3 u}{P} \\ \cos\beta'' &= \frac{3ab^3k\sin^2 u(1-2\sin^2 u)}{P} \\ \cos\gamma'' &= \frac{ab}{P}, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

wo der gemeinschaftliche Nenner

$$P = \sqrt{9b^6k^2\sin^2 u\,(4b^2\cos^6 u - 4a^2\sin^4 u\cos^2 u + a^2\sin^2 u) + a^2b^2}$$ ist.

*Die Doppelgleichung der Binormalen im Punkte P (u)* der Raumkurve heißt nun:

$$\frac{x - a\cos u}{6b^4k\sin u\cos^3 u} = \frac{y - b\sin u}{3ab^3k\sin^2 u(1-2\sin^2 u)} = \frac{z - b^3k\sin^3 u}{ab} \qquad (17)$$

Weil *die Hauptnormale* des Punktes $P(u)$ senkrecht steht auf der zugehörigen Tangente und Binormalen, welche sich ebenfalls rechtwinklig durchschneiden, so sind ihre Richtungskosinusse bestimmt durch die Ausdrücke:

$$\cos\alpha' = \cos\beta''\cos\gamma - \cos\gamma''\cos\beta \quad \text{usw}$$

wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Richtungswinkel der Tangente, und $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ diejenigen der Binormalen im Kurvenpunkte $(Pu)$ sind.

Für unsere Raumkurve erhält man durch Einsetzen der gefundenen Werte:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha' &= \frac{9ab^6k^2\sin^4 u\cos u(1-2\sin^2 u) - ab^2\cos u}{RP} \\ \cos\beta' &= -\frac{a^2b\sin u + 18b^7k^2\sin^3 u\cos^4 u}{RP} \\ \cos\gamma' &= \frac{6b^5k\sin u\cos^4 u + 3a^2b^3k\sin^3 u(1-2\sin^2 u)}{RP}, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

wo $R$ die früher gegebene Bedeutung (6) zukommt. Die Doppelgleichung der Hauptnormalen im Punkte $P(u)$ ergibt sich nun durch Substitution dieser Werte in der Gleichung:

$$\frac{x - a\cos u}{\cos\alpha'} = \frac{y - b\sin u}{\cos\beta'} = \frac{z - b^3k\sin u}{\cos\gamma'} \qquad (19)$$

Die Ausdrücke für die Richtungskosinusse der drei genannten Geraden lehren, daß, gleich wie die Tangenten, *auch die Haupt- und Binormalen in 2 Punkten, deren Parameterwinkel um 180° verschieden sind, die also symmetrisch zum Nullpunkt liegen, parallel verlaufen.*

Weil die beiden Tangenten in zwei zur $yz$-Ebene symmetrisch angeordneten Punkten sich in dieser Koordinatenebene, die zugleich Symmetrieebene der Raumkurve ist, schneiden, und die Haupt- und Binormalen zu ihnen senkrecht stehen, müssen sich aus rein geometrischen Gründen auch die beiden entsprechenden Haupt- und Binormalen je in einem Punkte dieser Ebene durchsetzen. Zu demselben Resultat gelangt man auch auf analytischem Wege wie bei den Tangenten. Der geometrische Ort aller dieser Schnittpunkte der Haupt- und Binormalen ist je eine *Selbstdurchdringungskurve der abwickelbaren Hauptnormalen- bzw. Binormalenfläche.* Beide Flächen besitzen demnach wie die Tangentenfläche je eine im Unendlichen und eine in der $yz$-Koordinatenebene liegende ebene Doppelkurve.

*Die Normalebene* in einem beliebigen Raumkurvenpunkte $P(u)$ wird von der zugehörigen Tangente rechtwinklig durchstoßen. Da sie also dieselben Richtungskosinusse (Gl. 8) besitzt, lautet ihre Gleichung:

$$(x - a\cos u)a\sin u + (y - b\sin u)b\cos u + (z - b^3k\sin^3 u) \cdot 3b^3k\sin^2 u\cos u = 0,$$

oder in anderer Form:

$$a\sin u\cdot x + b\cos u\cdot y + 3b^3k\sin^2 u\cos u\cdot z - \sin u\cos u \cdot (a^2 + b^2 - 3b^6k^2\sin^4 u) = 0. \tag{20}$$

Weil die Richtungskosinusse der *rektifizierenden Ebene* im Punkte $P(u)$ gleich denjenigen der entsprechenden Hauptnormalen (18) sind, so ergibt sich ihre Gleichung durch Einsetzen der letztern in den Ausdruck:

$$(x - a\cos u)\cos\alpha' + (y - b\sin u)\cos\beta' + (z - b^3k\sin^3 u)\cdot \cos\gamma' = 0. \tag{21}$$

Der *Schmiegungsebene*, die auf der Binormalen (16) senkrecht steht, kommt die Gleichung zu:

$$E = (x - a\cos u)\,6b^4k\sin u\cos^3 u + (y - b\sin u)\,3ab^3k\sin^2 u (1 - 2\sin^2 u) + (z - b^3k\sin^3 u)\,ab = 0, \quad \text{oder:}$$

$$E = 6b^3k\sin u\cos^3 u\cdot x + 3ab^2k\sin^2 u(1 - 2\sin^2 u)\cdot y + az - 2ab^3k\sin u(3 - 4\sin^2 u) = 0. \tag{22}$$

Nachdem wir nun die Formeln für die Geraden und Ebenen des die Raumkurve begleitenden Dreikantes aufgestellt haben, können wir uns über dessen Lage längs der Kurve genaueren Aufschluß geben. Wir legen unserer diesbezüglichen Untersuchung ein Rechtskoordinatensystem zugrunde und bezeichnen diejenige Richtung der Tangente als positiv, welche in Übereinstimmung steht mit der Bewegungsrichtung eines die Raumkurve bei wachsendem Parameter $u$ erzeugenden Kurvenpunktes. Wird im weiteren diejenige Richtung der Hauptnormalen als positiv festgesetzt, welche auf der gleichen Seite der rektifizierenden Ebene liegt wie die Raumkurve, so sei die Richtung der Binormalen dann positiv, wenn diese zu den festgelegten Richtungen der Tangente und Hauptnormalen ebenso gelegen ist wie die positive $z$-Achse zur $x$- und $y$-Achse.

1. *In den beiden Scheiteln* $S_1(a\,,0{,}0)$ und $S_2(-a\,,0{,}0)$ der Raumkurve, welchen die Parameterwinkel $u = 0°$, bzw. $u = 180°$ gehören, fällt, wie sich aus den oben aufgestellten Gleichungen sofort ergibt, die Schmiegungsebene mit der $xy$-, und die Normalebene mit der $yz$-Ebene zusammen, während die rektifizierende Ebene parallel zur $yz$-Ebene im Abstande $\pm a$ durch den betreffenden Scheitel geht.

Die Tangenten verlaufen parallel zur $y$-Achse und sind somit identisch mit den Tangenten an die Scheitel der großen Achse der Grundellipse; die Binormalen liegen parallel zur $z$-Achse, und die beiden Hauptnormalen fallen mit der $x$-Achse zusammen. Die Tangenten und Hauptnormalen in den beiden Scheiteln sind einander bzw. entgegengesetzt, die Binormalen gleichgerichtet (Fig. I).

Verschiebt man das Koordinatensystem parallel zu sich selbst in einen der beiden Scheitel, so fallen demnach die Ebenen und Geraden des charakteristischen Dreikantes mit den Ebenen und Achsen des Koordinatensystems zusammen.

2. *Für die beiden Pole der Raumkurve* $B_1(0,\ b,\ b^3k)$ und $B_2(0,\ -b,\ -b^3k)$, denen die Parameterwinkel $u = 90°$ und $u = 270°$ entsprechen, erhalten die Schmiegungsebenen bzw. die Gleichungen:

$$3b^2ky - z \mp 2b^3k = 0\,. \tag{23}$$

Sie verlaufen unter sich und zur $x$-Achse parallel; ihre Achsenabschnitte sind bzw.

$$y = \pm\frac{2}{3}b;\quad z - \mp 2b^3k\,.$$

Die Gleichungen der beiden Normalebenen reduzieren sich auf

$x = 0$, d. h. die Normalebenen in den beiden Polen der Raumkurve fallen mit der $yz$-Ebene zusammen.

Die rektifizierenden Ebenen in den Polen werden analytisch dargestellt durch:

$$y + 3b^2kz \mp b(3b^4k^2 + 1) = 0. \tag{23a}$$

Sie liegen wie die Schmiegungsebenen zueinander und zur $x$-Achse parallel.

Wie früher gefunden sind die Tangenten in den beiden Polen parallel der $x$-Achse; ihre Gleichungen lauten bzw.:

$$y = \pm b; \quad z = \pm b^3k.$$

Die Gleichungen (17) und (19) ergeben für die Abszisse $x$ der Haupt- und Binormalen in den Polen $B_1$ und $B_2$ den Wert Null; d. h. diese beiden Geraden liegen in der $yz$-Koordinatenebene. Die Hauptnormalen als Durchschnitte der Schmiegungs- und Normalebenen in $B_1$ und $B_2$ sind dann einfach gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} 3b^2ky - z \mp 2b^3k = 0 & \text{oder in explizíter Form} \\ z = 3b^2ky \mp 2b^3k. \end{cases} \tag{23b}$$

Auf gleiche Weise können die Binormalen in $B_1$ und $B_2$ als Schnittgeraden der Normalebenen mit den rektifizierenden Ebenen ausgedrückt werden durch

$$\left.\begin{aligned} &y + 3b^2kz \mp b(1 + 3b^4k^2) = 0 \quad \text{oder} \\ &z = -\frac{1}{3b^2k}\, y \mp \left(b^3k + \frac{1}{3b^2k}\right) \end{aligned}\right\} \tag{23c}$$

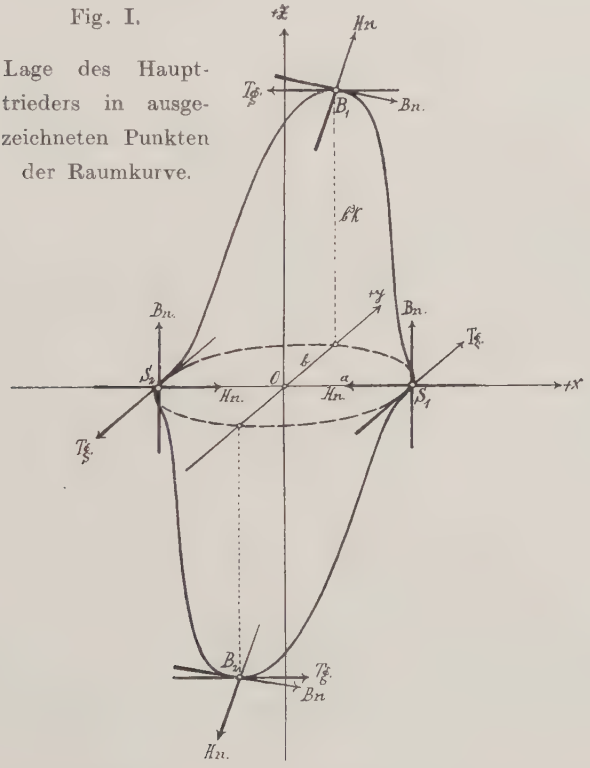
Für die relativen Richtungen der drei Kanten des Haupttrieders in beiden Polen der Raumkurve gilt das gleiche wie bei denjenigen der beiden Scheitel.

*Figur I* gibt uns ein anschauliches Bild über die sich stetig verändernde Lage des die Raumkurve begleitenden Dreikants. Aus ihr wie aus den oben aufgestellten Gleichungen läßt sich erkennen, daß *die Haupttrieder in zwei zentrisch symmetrisch zum Koordinatenursprung befindlichen Punkten parallel zueinander liegen*; die entsprechenden Binormalen sind gleich, die Tangenten und Hauptnormalen entgegengesetzt gerichtet. Durch eine halbe Drehung um die Binormale als Achse werden somit die Haupttrieder in zwei solchen Kurvenpunkten in bezug auf Lage und Richtung ihrer 3 Kanten in Übereinstimmung gebracht.

*Die Schmiegungsebene* eines Punktes der Raumkurve, die zwei konsekutive Tangenten derselben enthält, ist für unsere Untersuchungen besonders deshalb wichtig, weil sie die Tangentialebene der abwickelbaren Tangentenfläche ist, die letztere längs der durch den betreffenden Kurvenpunkt gehenden Tangente oder geradlinigen Erzeugenden berührt. Wir müssen uns daher noch eingehender mit ihr beschäftigen.

Fig. I.

Lage des Haupttrieders in ausgezeichneten Punkten der Raumkurve.




*Im Punkte* $P(u = 30°)$ *der Raumkurve* mit den Koordinaten

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{b^3 k}{8}$$

nimmt Gleichung (22) der Schmiegungsebene die Form an:

$$9\sqrt{3}\, b^3 kx + 3ab^2 ky + 8az - 16ab^3 k = 0. \tag{24}$$

Aus dem Auftreten der vier Wendepunkte in der Projektion unserer Raumkurve auf die $xz$-Ebene, denen die Parameterwinkel

$u = 45°$, $135°$, $225°$ und $315°$ angehören, haben wir geschlossen, daß die Schmiegungsebenen in den entsprechenden Raumkurvenpunkten mit den Koordinaten

$$x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad y = \pm\frac{b\sqrt{2}}{2}, \quad z = \pm\frac{b^3k\sqrt{2}}{2}$$

*senkrecht* auf dieser Projektionsebene stehen müssen. Für den Parameterwert $u = 45°$ verwandelt sich nun Gleichung (22) in:

$$3b^3kx + 2az - 2ab^3k\sqrt{2} = 0\,.$$

Die Schmiegungsebene des Punktes $P(u = 45°)$ steht also wirklich senkrecht auf der $xz$-Ebene. Ihre Gleichung, welche zugleich ihre Spurgerade in der $xz$-Ebene darstellt, ist nach (5) identisch mit der Gleichung der Inflexionstangente des Punktes $W(u = 45°)$ der eben erwähnten Vertikalprojektion der Raumkurve. Analog verhält es sich mit den Schmiegungsebenen der drei anderen Raumkurvenpunkte von den Parametern $u = 135°$, $225°$ und $315°$. Die Gleichungen der Schmiegungsebenen aller dieser vier Punkte der Raumkurve lauten nach (22):

$$\left.\begin{aligned} P_1\,(u = 45°):&\quad 3b^3kx + 2az - 2ab^3k\sqrt{2} = 0\\ P_2\,(u = 135°):&-3b^3kx + 2az - 2ab^3k\sqrt{2} = 0\\ P_3\,(u = 225°):&\quad 3b^3kx + 2az + 2ab^3k\sqrt{2} = 0\\ P_4\,(u = 315°):&-3b^3kx + 2az + 2ab^3k\sqrt{2} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Je zwei dieser Ebenen, welche den zentrisch symmetrisch zueinander liegenden Punkten $P_1$ und $P_3$, bzw. $P_2$ und $P_4$ entsprechen, sind zueinander parallel; ferner schneiden sich je zwei derselben, deren Berührungspunkte $P_1$ und $P_4$, bzw. $P_2$ und $P_3$ symmetrisch in bezug auf die $x$-Achse liegen, in der $xy$-Ebene in der Geraden

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3}a\,, \text{ bzw. } x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}a \qquad (25a)$$

und diejenigen beiden Schmiegungsebenen, die den Punkten $P_1$ und $P_2$, bzw. $P_3$ und $P_4$ angehören, für welche je die $yz$-Ebene Symmetrieebene ist, durchsetzen sich in dieser Ebene in der Geraden

$$z = b^3k\sqrt{2}\,, \text{ bzw. } z = -b^3k\sqrt{2} \qquad (25b)$$

Die Schmiegungsebenen zweier nicht unmittelbar aufeinanderfolgender Raumkurvenpunkte fallen zusammen, d. h. es entsteht

eine *Doppelschmiegungsebene der Raumkurve*, wenn ihre senkrechten Abstände vom Nullpunkt einander gleich sind, und wenn außerdem die Richtungswinkel dieser Perpendikel miteinander übereinstimmen, also die beiden Ebenen zueinander parallel liegen. Wie oben gefunden, verlaufen zwei Schmiegungsebenen dann zueinander parallel, wenn ihre Berührungspunkte auf der Raumkurve symmetrisch zum Nullpunkt liegen, die Parameterwinkel $u$ derselben also um 180° voneinander verschieden sind. Die Gleichung der zur Schmiegungsebene des Punktes $P(u)$ parallelen Schmiegungsebene des Punktes $P(u + 180°)$ lautet nun nach (22):

$$6b^3k \sin u \cos^3 u \cdot x + 3ab^2k \sin^2 u (1 - 2\sin^2 u)\, y + az + 2ab^3k \sin u (3 - 4\sin^2 u) = 0 .$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von (22) nur durch das Vorzeichen des konstanten Gliedes. Beide Schmiegungsebenen fallen nun zusammen, d. h. es entsteht eine *Doppelschmiegungsebene*, wenn die beiden erwähnten Gleichungen miteinander identisch sind. Dies ist aber nur möglich, wenn das konstante Glied in denselben verschwindet, also die Schmiegungsebenen *durch den Nullpunkt gehen*. Die zwei Bedingungen des Zusammenfallens zweier nicht konsekutiver Schmiegungsebenen unserer Raumkurve sind somit erfüllt, wenn

$$2ab^3k \sin u (3 - 4\sin^2 u) = 0 , \quad \text{oder}$$

$\sin u (3 - 4\sin^2 u) = 0$ ist. Dies verlangt

1.) $\sin u = 0 , \quad u = 0°$ und $180°$ .

Diesen beiden Parameterwinkeln entspricht, wie schon erwähnt, die Schmiegungsebene $z = 0$ , d. h. *die xy-Ebene ist Doppelschmiegungsebene der Raumkurve* und berührt sie in den beiden Scheiteln $S_1(u = 0°)$ und $S_2(u = 180°)$.

2.) $3 - 4\sin^2 u = 0 , \quad$ somit $\sin u = \pm\sqrt{3} , \quad$ also

$u = 60°$ und $240°$ , bzw. $u = 120°$ und $300°$.

Nach den Gleichungen (22) besitzen somit die beiden zentrisch-symmetrisch zueinanderliegenden Punkte $P(u = 60°)$ und $P(u = 240°)$ der Raumkurve mit den Koordinaten

$$x = \pm\frac{a}{2}, \quad y = \pm\frac{b\sqrt{3}}{2}, \quad z = \pm\frac{3\sqrt{3}b^3k}{8}$$

je dieselbe Schmiegungsebene, dargestellt durch die Gleichung

$$3\sqrt{3}b^3kx - 9ab^2ky + 8az = 0\,. \tag{26}$$

Ebenso fallen die Gleichungen der Schmiegungsebenen in den beiden symmetrisch in bezug auf den Koordinatenursprung liegenden Kurvenpunkten $P(u = 120°)$ und $P(u = 300°)$ mit den Koordinaten

$$x = \mp\frac{a}{2}\,, \qquad y = \pm\frac{b\sqrt{3}}{2}\,, \qquad z = \pm\frac{3\sqrt{3}\,b^3k}{8}$$

zusammen in

$$3\sqrt{3}b^3kx + 9ab^2ky - 8az = 0\,. \tag{26a}$$

Außer der $xy$-Ebene weist also unsere Raumkurve noch *zwei weitere, durch den Nullpunkt gehende Doppelschmiegungsebenen auf.* Diese schneiden die $xy$-Ebene in den beiden Geraden

$$y = \pm\frac{b}{a\sqrt{3}}\,x\,;$$

sie liegen symmetrisch zueinander in bezug auf die $yz$-Ebene und durchsetzen sich in ihr in der Geraden

$$9b^2ky - 8z = 0\,.$$

Übertragen auf die Tangentenfläche der Raumkurve erhalten wir das Ergebnis: *Die Tangentenfläche besitzt drei Doppeltangentialebenen,* von denen eine identisch ist mit der $xy$-Ebene, und die beiden anderen durch die Gleichungen (26) und (26a) dargestellt sind, und die alle durch den Koordinatenursprung gehen.

Die Gleichung der Schmiegungsebene im Punkte $P(u)$ der Durchdringungskurve wird durch Gleichung (22): $E = 0$ dargestellt. Die zu ihr unendlich benachbarte Schmiegungsebene im Punkte $P'(u + du)$ hat die Gleichung

$$E' = E + \frac{dE}{du}\,du = 0\,.$$

Sie lautet also:

$$\left.\begin{aligned} E' - 6b^3k\{&\sin u\cos^3 u + \cos^2 u(\cos^2 u - 3\sin^2 u)du\}\cdot x + \\ 3ab^2k\{&\sin^2 u - 2\sin^4 u + 2\sin u\cos u(1 - 4\sin^2 u)du\}\cdot y + \\ az - 2ab^3k\{&3\sin u - 4\sin^3 u + 3\cos u(1 - 4\sin^2 u)\,du\} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Diese der Schmiegungsebene $E = 0$ des Punktes $P(u)$ der Raumkurve unendlich benachbarte Schmiegungsebene $E' = 0$ fällt mit der

Ebene $E = 0$ zusammen, es entsteht eine *stationäre, Rückkehr- oder Wendeberührungsebene*, wenn die Gleichungen (27) und (22) dieser Ebenen einander identisch werden. Es ist dies der Fall, wenn in der Gleichung (27) alle mit $du$ multiplizierten Glieder gleichzeitig gleich Null werden, also wenn

$$\begin{aligned} &1. \quad \cos^2 u\,(\cos^2 u - 3\sin^2 u) = 0 \qquad \text{oder} \\ &\qquad \cos^2 u(1 - 4\sin^2 u) \quad = 0 \\ &2. \quad \sin u\cos u(1 - 4\sin^2 u) = 0 \\ &3. \quad \cos u(1 - 4\sin^2 u) \quad = 0\,. \end{aligned}$$

Diejenigen Werte von $u$, die gleichzeitig diesen drei Gleichungen genügen, sind die Parameterwinkel derjenigen Punkte $P(u)$ unserer Durchdringungskurve, in denen zwei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen in einer *Wendeberührungsebene* zusammenfallen. Diese Punkte sind *Oskulationspunkte* der Raumkurve; in einem solchen liegen vier aufeinanderfolgende Punkte der Raumkurve in der zugehörigen Wendeberührungsebene.

Die obigen drei Gleichungen sind gleichzeitig erfüllt

I. Für $\cos u = 0$, also für $u = 90°$ und $270°$;

es sind dies die Parameterwinkel der beiden *Pole* $B_1$ *und* $B_2$ der Raumkurve. Diese Punkte sind also Oskulationspunkte; die Gleichungen ihrer Rückkehrebenen lauten nach (23):

$$\left\{\begin{array}{ll} 3b^2ky - z - 2b^3k = 0\,, & \text{bzw.} \\ 3b^2ky - z + 2b^3\mathrm{k} - 0\,. & \end{array}\right. \tag{28}$$

II. Für $1 - 4\sin^2 u = 0$, oder $\sin u = \pm\frac{1}{2}$,

also für $u = 30°$, $150°$, $210°$ und $330°$.

Zu den vier diesen Parameterwerten entsprechenden *Oskulationspunkten* $O_1$, $O_2$, $O_3$ *und* $O_4$ gehören folgende stationäre Ebenen:

$$\left.\begin{array}{ll} O_1(u = 30°): & 9\sqrt{3}b^3kx + 3ab^2ky + 8az - 16ab^3k = 0 \\ O_2(u = 150°): & -9\sqrt{3}b^3kx + 3ab^2ky + 8az - 16ab^3k = 0 \\ O_3(u = 210°): & 9\sqrt{3}b^3kx + 3ab^2ky + 8az + 16ab^3k = 0 \\ O_4(u = 330°): & -9\sqrt{3}b^3kx + 3ab^2ky + 8az + 16ab^3k = 0\,. \end{array}\right\} \tag{29}$$

Je zwei dieser Ebenen, welche den symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt liegenden Oskulationspunkten $O_1$ und $O_2$, bzw. $O_3$ und $O_4$ entsprechen, sind zueinander parallel, während sich diejenigen,

welche den symmetrisch zur $yz$-Ebene gelegenen Punkten $O_1$ und $O_2$, bzw. $O_3$ und $O_4$ angehören, je in einer Geraden dieser Koordinatenebene schneiden mit den Gleichungen:

$$3b^2ky + 8z \mp 16b^3k = 0\,. \tag{29a}$$

Weil eine Schmiegungsebene der Raumkurve Tangentialebene der zugehörigen Tangentenfläche ist, und in der stationären Ebene zwei derselben zusammenfallen, so bedeutet dies, übertragen, auf die Tangentenfläche: Gemäß den stationären Ebenen der Raumkurve *besitzt die Tangentenfläche sechs Wendetangentialebenen*, dargestellt durch die Gleichungen (28) und (29). Die entsprechenden *Wendegeraden* sind identisch mit den Tangenten der Oskulationspunkte der Raumkurve. Während, wie früher festgestellt, die den beiden Polen $B_1$ und $B_2$ zugehörigen Wendegeraden bzw. gegeben sind durch

$$y = \pm b\,, \qquad z = \pm b^3k\,, \tag{30}$$

lauten die Doppelgleichungen der durch die übrigen Oskulationspunkte $O$ gehenden Wendegeraden nach (9):

$$O_1(u = 30°) \text{ bzw. } O_2(u = 150°): \quad \frac{2x \mp a\sqrt{3}}{-a} = \frac{2y - b}{\pm b\sqrt{3}} = \frac{8z - b^3k}{\pm 3\sqrt{3}b^3k}$$

$$O_3(u = 210°) \text{ bzw. } O_4(u = 330°): \quad \frac{2x \pm a\sqrt{3}}{a} = \frac{2y + b}{\mp b\sqrt{3}} = \frac{8z + b^3k}{\mp 3\sqrt{3}b^3k}$$

wo die oberen Vorzeichen den Ausdrücken für die Oskulationspunkte $O_1$ bzw. $O_3$, die unteren denjenigen von $O_2$ bzw. $O_4$ entsprechen.

## § 4. Die Krümmungen der Raumkurve.

### Die erste Krümmung.

Drei aufeinanderfolgende unendlich benachbarte Punkte einer Raumkurve bestimmen einen Kreis, den *Krümmungs- oder Oskulationskreis*, der ganz in der Schmiegungsebene liegt und mit der Raumkurve eine Berührung zweiter Ordnung hat. Der Radius dieses Kreises, *der Radius der ersten oder absoluten Krümmung*, ist analytisch definiert durch den Ausdruck:

$$\varrho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{\left(\frac{ds}{du}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{du^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{du^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{du^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{du^2}\right)^2}}.$$

Darin bedeutet $ds$ das Bogendifferential und $d\theta$ den *Kontingenzwinkel*, d. h. den unendlich kleinen Richtungsunterschied, welchen die Tangente im Punkte $P(u)$ mit derjenigen im unendlich benachbarten Punkte $P'(u + du)$ bildet.

Der reziproke Wert des Krümmungsradius:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\theta}{ds}$$

heißt *das Maß der absoluten Krümmung oder die erste Krümmung der Raumkurve.*

Im vorliegenden Falle wird nun:

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u\,(1 + 9b^4k^2 \sin^4 u)} = R$$

$$\frac{d^2s}{du^2} = \frac{\sin u \cos u\,(a^2 - b^2 + 9b^6k^2 \sin^2 u\,(2 - 3\sin^2 u))}{R} = \frac{M}{R},$$

wenn der Zähler zur Abkürzung mit $M$ bezeichnet wird. Für den Krümmungsradius im Punkte $P(u)$ der Raumkurve erhält man nun den Ausdruck:

$$\varrho = \frac{R^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + 9b^6k^2 \sin^2 u\,(4 - 12\sin^2 u + 9\sin^4 u) - \left(\frac{M}{R}\right)^2}} \quad (32)$$

Für die Parameterwerte $u = 0°$, bzw. $u = 180°$, d. h. *für die Scheitel $S_1$ und $S_2$ der Raumkurve*, wird

$$R^2 = b \qquad \text{und} \qquad \frac{M^2}{R^2} = 0.$$

Also folgt für den Krümmungsradius in diesen Punkten

$$\varrho = \frac{b^2}{a}, \qquad \text{d. h.}$$

Der Krümmungsradius in den beiden Scheiteln der Raumkurve ist gleich dem Halbparameter der Grundellipse, also gleich ihrem Krümmungsradius im Scheitel der großen Achse.

*Für die beiden Pole* $B_1(u = 90°)$ und $B_2(u = 270°)$ ergibt sich

$$R^2 = a^2; \qquad \frac{M^2}{R^2} = 0 .$$

Der Krümmungsradius in den beiden Polen erhält demnach den Wert

$$\varrho = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 + 9b^6k^2}} = \frac{a^2}{b\sqrt{1 + 9b^4k^2}} .$$

Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Raumkurve ist im allgemeinen wieder eine gewundene Kurve, deren Parametergleichungen wir zweckmäßig in der Form annehmen:

$$\xi = x + \varrho \cos\alpha'$$
$$\eta = y + \varrho \cos\beta'$$
$$\zeta = z + \varrho \cos\gamma' .$$

$\xi$ , $\eta$ , $\zeta$ bedeuten die laufenden Koordinaten und $x$ , $y$ , $z$ diejenigen des zugehörigen Punktes der Raumkurve, während $\alpha'$ , $\beta'$ , $\gamma'$ die Richtungswinkel der durch den Kurvenpunkt $P(x , y , z)$ gehenden Hauptnormalen sind, auf welcher das entsprechende Krümmungszentrum liegt. Durch Einsetzen unserer speziellen Werte in den oben stehenden Ausdrücken erhält man die Parametergleichungen für die vorliegende Ortskurve im Raume.

Es seien im besonderen *die Krümmungszentren* der folgenden Punkte untersucht:

1. Für die beiden *Scheitel* $S_1(u = 0°)$ und $S_2(u = 180°)$ wird bzw. $\cos\alpha' = \mp 1$; $\cos\beta' = \cos\gamma' = 0$ . Bezeichnet man noch mit $e$ die lineare Exzentrizität der Grundellipse, so ergeben sich für die Krümmungsmittelpunktskoordinaten der Scheitel die Werte:

$$\xi = \pm a \mp \frac{b^2}{a} = \pm \frac{a^2 - b^2}{a} = \pm \frac{e^2}{a} ,$$
$$\eta = 0 , \qquad \zeta = 0 ,$$

d. h. die Krümmungszentra der beiden Scheitel liegen auf der $x$-Achse im Abstande $\pm \frac{e^2}{a}$ vom Nullpunkt, also in den Krümmungsmittelpunkten der beiden Scheitel der großen Achse der Grundellipse.

2. In den *Polen* $B_1(u = 90°)$ und $B_2(u = 270°)$ der Raumkurve wird bzw.

$$\cos\alpha' = 0$$

$$\cos\beta' = \mp\frac{a^2 b}{a\sqrt{9a^2b^6k^2 + a^2b^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{1 + 9b^4k^2}}$$

$$\cos\gamma' = \mp\frac{3a^2b^3k}{a\sqrt{9a^2b^6k^2 + a^2b^2}} = \mp\frac{3b^2k}{\sqrt{1 + 9b^4k^2}}.$$

Die Krümmungsmittelpunktskoordinaten erhalten somit die Werte:

$$\xi = 0$$

$$\eta = \pm b \pm \frac{a^2}{b(1 + 9b^4k^2)}$$

$$\zeta = \pm b^3k \mp \frac{3a^2bk}{1 + 9b^4k^2},$$

wobei die oberen Vorzeichen für den Pol $B_1$, die unteren für den Pol $B_2$ gelten. Die Krümmungsmittelpunkte der beiden Pole liegen demnach in der $yz$-Koordinatenebene.

**Die Torsion, die Gesamtkrümmung und die Schmiegungskugel.**

Der unendlich kleine Winkel $d\tau$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lagen der sich stetig bewegenden Schmiegungsebene heißt *Torsionswinkel*, und das Verhältnis zum zugehörigen Bogenelement $\frac{d\tau}{ds}$ bezeichnet man als das Maß der zweiten Krümmung oder kurz als die *Torsion* im betreffenden Kurvenpunkt. Der reziproke Wert der Torsion $T$ heißt der *Torsionsradius*. Er ist analytisch gegeben durch den Ausdruck

$$r = \frac{1}{T} = \frac{ds}{d\tau} = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{E},$$

worin $X$, $Y$ und $Z$ die früher angegebenen Werte zukommen, während mit $E$ folgende Determinante bezeichnet wird:

$$E = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

Die angedeuteten Differentiationen sind nach dem Parameter $u$ auszuführen. In unserem Falle wird:

$$E = 6ab^4k\cos u\,(1 - 4\sin^2 u).$$

Somit erhalten wir für den gesuchten Torsionsradius den Ausdruck:

$$r = \frac{9b^4k^2 \sin^2 u\,[4b^2 \cos^6 u + a^2 \sin^2 u\,(1 - 2\sin^2 u)^2] + a^2}{6ab^2k \cos u\,(1 - 4\sin^2 u)}. \qquad (33)$$

Speziell in *den Scheiteln der Raumkurve* bekommt der Torsionsradius den Wert:

$$r = \frac{a}{6b^2k}.$$

*Der Torsionsradius r wird unendlich groß* und der Torsionswinkel $d\tau$ verschwindet, wenn der Nenner des Ausdruckes (32) gleich Null wird, also wenn

$$6ab^2k \cos u\,(1 - 4\sin^2 u) = 0.$$

Daraus folgt:

1.) $\cos u = 0$; $\quad u = 90^0$ und $270°$.

2.) $1 - 4\sin^2 u = 0$; $\quad \sin u = \pm\frac{1}{2}$, also

$u = 30°,\ 150°,\ 210°$ und $330°$.

Diesen Parameterwinkeln entsprechen die beiden Pole $B_1$ und $B_2$, bzw. die Punkte $O_1$, $O_2$, $O_3$ und $O_4$ der Raumkurve. In ihnen fallen somit zwei unendlich benachbarte Schmiegungsebenen zusammen. Sie sind, wie schon früher festgestellt, *Oskulationspunkte* der Raumkurve. Außer diesen sechs sind keine weiteren mehr vorhanden.

*Gesamtkrümmung* einer Raumkurve wird das Verhältnis

$$\frac{1}{R} = \frac{d\tau'}{ds}$$

genannt, wo $d\tau'$ der unendlich kleine Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Hauptnormalen der Raumkurve bedeutet. $R$ heißt der *Radius der ganzen Krümmung*, obgleich ihm, wie auch dem Torsionsradius, keine geometrische Bedeutung zukommt. Er ist definiert durch die Gleichung

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}.$$

Durch Einführung der entsprechenden Werte für $\varrho$ und $r$ bekommt man den Ausdruck für die vorliegende Raumkurve.

Für den Radius der Gesamtkrümmung in den *Scheiteln S* ergibt sich speziell:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^2}{b^4} + \frac{36\,b^4k^2}{a^2} = \frac{a^4 + 36\,b^8k^2}{a^2b^4};$$

$$R = \frac{ab^2}{\sqrt{a^4 + 36\,b^8k^2}}.$$

In den beiden *Polen* und den vier anderen *Oskulationspunkten* $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ der Raumkurve ist die Gesamtkrümmung gleich der ersten Krümmung, da für diese Punkte die Torsion verschwindet.

Für *die sphärische Krümmung* und *die Schmiegungskugel*, die durch vier aufeinanderfolgende unendlich benachbarte Punkte hindurchgeht, und deren Radius aus der Beziehung

$$\varrho'^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\tau}\right)^2$$

bestimmt werden kann, erhält man sehr verwickelte Ausdrücke, welche zu keinen besonders bemerkenswerten Resultaten führen.

## § 5. Die Charaktere der Raumkurve.

Zur Untersuchung der *Charaktere und Singularitäten* der Raumkurve benützen wir die Cayleyschen Gleichungen, welche aus drei bekannten derselben die übrigen berechnen lassen.

*Die Ordnung* der Raumkurve ist, wie früher festgestellt:

$$n = 6.$$

*Die Klasse k* der Raumkurve oder der abwickelbaren Tangentenfläche ist gleich der Anzahl der Schmiegungsebenen, die durch einen beliebigen Punkt des Raumes hindurchgehen. Zur Bestimmung dieser Größe bedienen wir uns der Gleichung der Schmiegungsebene, welche sich aus den Parameterdarstellungen (2a) ergibt, und welche auf dieselbe Art wie Gleichung (22) aufgestellt werden kann. Sie lautet, bezogen auf den Punkt $P(v)$ der Raumkurve:

$$6bkv(b^2 - v^2)^{3/2} \cdot x + 3akv^2(b^2 - 2v^2)y + ab^2z + 2ab^2kv(4v^2 - 3b^2) = 0. \quad (34)$$

Bedeutet nun $Q(x_0y_0z_0)$ einen beliebigen Raumpunkt, und setzt man seine Koordinaten in diesen Ausdruck ein, so entsteht eine algebraische Gleichung in $v$:

$$-6bkx_0v(b^2 - v^2)^{3/2} = 3aky_0v^2(b^2 - 2v^2) + ab^2z_0 + 2ab^2kv(4v^2 - 3b^2).$$

deren Wurzeln die Parameter der durch den erwähnten Punkt gehenden Schmiegungsebenen sind. Durch Quadrieren beider Seiten verschwindet der gebrochene Exponent und man erhält eine Gleichung 8. Grades in $v$, d. h. es gibt acht verschiedene Schmiegungsebenen, die durch denselben festen Punkt $Q(x_0 y_0 z_0)$ des Raumes gehen. *Die Klasse der Raumkurve ist daher*

$$k = 8 .$$

*Der Rang* der Raumkurve oder ihrer Tangentenfläche ist gleich der Anzahl der Tangenten, welche eine beliebige Gerade im Raume schneiden. Aus der Doppelgleichung (15) folgt für die Grund- und Aufrisse der Kurventangente im Punkte $P(v)$:

$$y = \frac{(bx - a\sqrt{b^2 - v^2})\sqrt{b^2 - v^2}}{-av} + v$$

$$z = \frac{3kv(bx - a\sqrt{b^2 - v^2})\sqrt{b^2 - v^2}}{-a} + kv^3$$

Die beliebige Raumgerade sei gegeben durch die Gleichungen

$$y = mx + n$$
$$z = px + q,$$

wo $m$, $n$, $p$ und $q$ beliebige Konstanten bedeuten. Der gemeinschaftliche Schnittpunkt beider Geraden sei $Q(xyz)$. Durch Elimination der drei Koordinaten $x$, $y$, $z$ aus den vier vorstehenden Beziehungen entsteht eine Gleichung achten Grades im Parameter $v$. Es gibt somit acht verschiedene Parameterwerte, d. h. acht verschiedene Kurventangenten, welche die beliebige Gerade in einem Punkte $Q(xyz)$ schneiden, d. h. *der Rang der Raumkurve ist*, in Übereinstimmung mit dem früher auf anderem Wege gefundenen Werte: $r = 8$ .

Mit Hilfe der drei bekannten Charaktere

$$n = 6, \quad k = 8, \quad r = 8$$

erhält man nun aus den von Cayley aufgestellten acht Gleichungen die Zahlen, die den übrigen charakteristischen Größen zukommen, nämlich:

Die Zahl der „*Punkte in zwei Linien*“, welche in einer beliebig gegebenen Ebene des Raumes liegen, ist

$$x = 15 .$$

Darunter verstehen wir die Schnittpunkte von zwei Tangenten der Raumkurve, die einander nicht unendlich benachbart sind. Diese Punkte liegen auf der Tangentenfläche selbst, und ihr geometrischer Ort ist eine *Doppelkurve* derselben, längs welcher diese sich selbst durchdringt. Da in jeder Ebene des Raumes fünfzehn solcher Punkte liegen, so ist diese *Selbstdurchdringungskurve von der fünfzehnten Ordnung*. Wie schon früher bemerkt, *zerfällt sie in vier ebene Kurven*, von denen drei, je vom vierten Grade, in Ebenen liegen, die senkrecht auf der $xy$-Ebene stehen, nämlich in der $yz$-Ebene und den zwei zu dieser symmetrisch verlaufenden:

$$y = \pm \frac{b}{a\sqrt{3}} x ,$$

während die vierte eine *Doppelkurve dritten Grades* in der unendlich fernen Ebene des Raumes ist, erzeugt durch die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte je zweier paralleler Tangenten der Raumkurve. In diesen vier Ebenen liegen somit unendlich viele Punkte in zwei Linien.

Diejenigen Schmiegungsebenen, welche vier konsekutive Kurvenpunkte, also einen Oskulationspunkt der Raumkurve, enthalten, heißen *stationäre, Rückkehr- oder Wendeberührungsebenen*. Ihre Anzahl ist

$$\alpha = 6 .$$

Sie sind, wie früher festgestellt, sämtlich reell und gehören zu den beiden Polen $B_1(u = 90°)$, $B_2(u = 270°)$ und den vier weiteren Oskulationspunkten $O_1(u = 30°)$, $O_2(u = 150°)$, $O_3(u = 210°)$, $O_4(u = 330°)$ der Raumkurve.

Die Zahl der „*Linien in zwei Ebenen*“, d. h. der Schnittlinien irgend zweier nicht aufeinanderfolgender Schmiegungsebenen, die in einer beliebig gegebenen Ebene $E$ des Raumes liegen, wird

$$g = 15 .$$

Sie stimmt überein mit derjenigen der Punkte in zwei Linien. In obiger Ziffer ist aber auch die Anzahl der in jener beliebigen Ebene $E$ liegenden Spurgeraden der *Doppelschmiegungsebenen* der Raumkurve enthalten, d. h. derjenigen Schmiegungsebenen, welche dieselbe in zwei verschiedenen Punkten berühren. Da nun, wie früher festgestellt, die Raumkurve drei Doppelschmiegungsebenen besitzt,

nämlich die $xy$-Koordinatenebene und die beiden durch die Gleichungen (26) und (26a) dargestellten Ebenen, so vermindert sich die Zahl der übrigen Linien in zwei Ebenen auf zwölf. Weil die Tangenten der Doppelkurven in den oben erwähnten vier Ebenen die Schnittlinien je zweier nicht aufeinanderfolgender Schmiegungsebenen sind, so liegen in diesen vier ausgezeichneten Ebenen je unendlich viele solcher Linien.

Eine Ebene durch zwei sich schneidende, aber nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Tangenten der Raumkurve heißt „*Ebene durch zwei Linien*". Durch jeden beliebigen Raumpunkt gehen

$$y = 13$$

solcher Ebenen. Da eine beliebige Tangente vom Parameter $u$ nach den Gleichungen (12a—d) von vier anderen, ihr nicht unendlich benachbarten geschnitten wird, so können durch jede Tangente vier Ebenen durch zwei Linien gelegt werden. Darunter befindet sich stets eine Ebene, welche durch die Tangente des Punktes $P(u)$ und die zu ihr parallele des Punktes $P'(u + 180°)$ geht, und deren Gleichung lautet:

$$2b^3k \sin^3 u \cos u \cdot x - ab^2k \sin^2 u(3 - 2\sin^2 u)y + az = 0 \cdot \quad (35)$$

Weil die beiden Berührungspunkte $P$ und $P'$ in bezug auf die $yz$-Ebene zueinander symmetrisch liegen, so enthalten alle diese Ebenen den Nullpunkt, wie auch aus obiger Gleichung ersichtlich ist. Die Enveloppe sämtlicher so gebildeter Ebenen ist ein Kegel mit der Spitze im Nullpunkt. Er entsteht auch durch Verbindung des Koordinatenursprunges mit allen Punkten der Raumkurve und heißt *Enveloppenkegel*. Durch seinen Scheitel, den Nullpunkt, gehen unendlich viele Ebenen durch zwei Linien.

*Rückkehrpunkte oder Spitzen* der Raumkurve, welche dadurch charakterisiert sind, daß durch sie vier aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen, also auch drei konsekutive Tangenten gehen, sind

$$\beta = 2$$

vorhanden. Weil der unendlich ferne Punkt der $z$-Achse ein vierfacher Kurvenpunkt ist, so liegt die Vermutung nahe, die beiden Spitzen seien in ihm enthalten. Wir stellen daher die Gleichungen

seiner Tangenten auf unter der Berücksichtigung, daß die Tangenten unserer Raumkurve identisch sind mit den Schnittgeraden der Tangentialebenen der beiden erzeugenden Zylinder an den betreffenden Kurvenpunkt. Vermittels der Substitutionen

$$x + \frac{x'}{z'}; \quad y = \frac{y'}{z'}; \quad z = \frac{1}{z'}$$

projizieren wir den unendlich fernen Punkt der $z$-Achse in den Nullpunkt. Durch diese Projektion geht der elliptische Zylinder in einen elliptischen Kegel mit Scheitel im Nullpunkt über von der Gleichung

$$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2 z'^2,$$

während der transformierte kubische Zylinder dargestellt wird durch

$$z'^2 = k y'^3.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß der Nullpunkt ein konischer Doppelpunkt des transformierten elliptischen Kegels, mit dem auf der $x'y'$-Ebene senkrecht stehenden elliptischen Kegel

$$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2 z'^2$$

als Knotenkegel, und ein uniplanarer Doppelpunkt des transformierten kubischen Zylinders mit der doppelt zu zählenden Ebene

$$z' = 0$$

als Knotenebene ist. Diese doppelt gelegte Knotenebene schneidet nun den elliptischen Knotenkegel in zwei doppelt zu zählenden Geraden, welche die Tangenten des vierfachen Nullpunktes der beiden transformierten Flächen darstellen.

Bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem lauten nun die Gleichungen der vier Tangenten des unendlich fernen vierfachen Raumkurvenpunktes:

$$y = \pm \frac{b}{a} i x, \quad z = \infty. \qquad \text{d. h.}$$

*Die vier Tangenten* des unendlich fernen vierfachen Punktes der Raumkurve in der Richtung der $z$-Achse *fallen zusammen in zwei je doppelt zu zählenden* in der unendlich fernen Ebene des Raumes liegenden *konjugiert imaginären Geraden.*

Legt man nun durch den oben erwähnten *Enveloppenkegel*, auf welchen wir nicht weiter eingehen wollen, eine Ebene parallel der $xy$-Ebene, so muß offenbar der Nullpunkt der so erhaltenen Schnittkurve, der in der $z$-Achse des Raumkoordinatensystems liegt und dem unendlich fernen vierfachen isolierten Raumkurvenpunkte in der Richtung dieser Achse entspricht, ebenfalls als vierfacher isolierter Punkt auftreten mit den beiden doppelt zu zählenden konjugiert imaginären Tangenten

$$y = \pm \frac{b}{a} ix.$$

Dieser Punkt ist aber sechs Doppelpunkten der ebenen Schnittkurve gleichwertig, unter denen *zwei durch Spitzen zu ersetzen sind.* Diesen beiden Spitzen der Schnittkurve entsprechen zwei Kuspidal- oder Rückkehrkanten des Enveloppenkegels, und somit zwei Spitzen der Raumkurve selbst. Wir erhalten also das Resultat: *Die beiden gesuchten Spitzen der Raumkurve sind in ihrem unendlich fernen isolierten vierfachen Punkte der z-Achse enthalten.*

Die Anzahl der „*Linien durch zwei Punkte*“, d. h. der Verbindungslinien irgend zweier Kurvenpunkte, welche durch einen beliebigen Punkt des Raumes hindurchgehen, wird:

$$h = 8.$$

Die Raumkurve besitzt daher acht scheinbare Doppelpunkte, d. h. es gibt acht Sehstrahlen von jedem Raumpunkte aus, welche die Raumkurve zweimal treffen. Eine Ausnahme macht der Koordinatenursprung: infolge der zentrischen Symmetrie der Raumkurve gehen unendlich viele „Linien durch zwei Punkte“ durch ihn.

II. Abschnitt.

# Die abwickelbare Tangentenfläche.

## § 6. Aufstellung und Diskussion der Gleichung der Tangentenfläche in rechtwinkligen Koordinaten.

Die abwickelbare Tangentenfläche ist die *Enveloppe sämtlicher Schmiegungsebenen der Raumkurve.* Zur Herleitung ihrer Gleichung benützen wir eine zweite Definition, laut welcher sie als *der geometrische Ort sämtlicher Tangenten der Raumkurve* aufzufassen ist.

Aus der Doppelgleichung der Tangente im Punkte $P(v)$ der Raumkurve entstehen, wenn nur das negative Vorzeichen berücksichtigt wird, die ihr gleichwertigen Formen:

$$\begin{cases} b\sqrt{b^2 - v^2} \cdot x + avy - ab^2 = 0 \\ 3kv^2y - z - 2kv^3 = 0\,. \end{cases}$$

Zu jedem gegebenen Werte von $v$ gehört eine bestimmte Tangente. Lassen wir den Parameter alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig durchlaufen, so erhalten wir die Gesamtheit der Tangenten: die Tangentenfläche. Ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten ergibt sich demnach durch Elimination des Parameters $v$ aus den beiden obigen Ausdrücken. Zu diesem Zwecke quadrieren wir die erste Gleichung und bekommen:

$$b^2(b^2 - v^2)x^2 = a^2v^2y^2 - 2a^2b^2vy + a^2b^4;$$

ordnet man noch nach Potenzen von $v$, so folgt:

$$(b^2x^2 + a^2y^2) \cdot v^2 - 2a^2b^2y \cdot v + b^4(a^2 - x^2) = 0$$

Nach der zweiten Gleichung ist:

$$2kv^3 - 3ky \cdot v^2 + z = 0\,.$$

Um aus diesen beiden Beziehungen den Parameter $v$ wegzuschaffen, wenden wir die dialytische Methode von Euler an und erhalten die Eliminationsdeterminante fünften Grades:

$$\begin{vmatrix} 2k & -3ky & 0 & z & 0 \\ 0 & 2k & -3ky & 0 & z \\ (b^2x^2+a^2y^2) & -2a^2b^2y & b^4(a^2-x^2) & 0 & 0 \\ 0 & (b^2x^2+a^2y^2) & -2a^2b^2y & b^4(a^2-x^2) & 0 \\ 0 & 0 & (b^2x^2+a^2y^2) & -2a^2b^2y & b^4(a^2-x^2) \end{vmatrix} = 0$$

Ausgerechnet liefert sie die *Gleichung der Tangentenfläche in rechtwinkligen Koordinaten*:

$$\begin{aligned} &9b^{10}k^2x^6y^2 + b^6x^6z^2 - 6b^8kx^6yz + a^6y^6z^2 + 9a^2b^8k^2x^4y^4 \\ &- 12a^2b^6kx^4y^3z + 3a^2b^4x^4y^2z^2 - 6a^4b^4kx^2y^5z + 3a^4b^2x^2y^4z^2 \\ &- 4b^{12}k^2x^6 - 30a^2b^{10}k^2x^4y^2 + 18a^2b^8kx^4yz - 18a^4b^8k^2x^2y^4 \\ &+ 12a^4b^6kx^2y^3z - 6a^6b^4ky^5z \\ &+ 12a^2b^{12}k^2x^4 + 33a^4b^{10}k^2x^2y^2 - 12a^4b^8kx^2yz + 9a^6b^8k^2y^4 \\ &+ 4a^6b^6ky^3z \\ &- 12a^4b^{12}k^2x^2 - 12a^6b^{10}k^2y^2 + 4a^6b^{12}k^2 = 0\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Die Gleichung ist vom achten Grade in den veränderlichen Koordinaten $x$, $y$, $z$, also *die Tangentenfläche eine abwickelbare Regelfläche achter Ordnung. Sie liegt symmetrisch in bezug auf die yz-Ebene und den Nullpunkt, also auch symmetrisch in bezug auf die x-Achse.*

Weil jede Tangente der Schnittkurve der beiden erzeugenden Zylinder die Schnittlinie der zwei zugehörigen Tangentialebenen dieser Flächen im betreffenden Kurvenpunkte ist, und sämtliche Tangentialebenen des elliptischen Zylinders außerhalb desselben verlaufen, so kann *kein Teil der durch die Gesamtheit aller Tangenten gebildeten Tangentenfläche innerhalb des elliptischen Zylinders liegen.* Ihre Spur in der $xy$-Ebene befindet sich daher ganz außerhalb der Grundellipse.

Um uns ein geometrisches Bild von der Fläche machen zu können, betrachten wir Kurven, die auf ihr liegen, die sogenannten *Flächen- oder Parameterkurven* und untersuchen dann ihre *Schnitte mit den Koordinatenebenen.*

## § 7. Die Parameterdarstellung der Tangentenfläche.

Während die Koordinaten jedes Raumkurvenpunktes als Funktionen eines einzigen veränderlichen Parameters ausgedrückt werden können, enthält die Parameterdarstellung einer Fläche, die für viele Untersuchungen der Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten vorzuziehen ist, immer zwei veränderliche Parameter.

Mit Hilfe der Parameterformen der Raumkurve

$$x = \varphi(u); \qquad y = \chi(u); \qquad z = \psi(u)$$

kann die zugehörige abwickelbare Tangentenfläche derselben dargestellt werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) + v\varphi'(u) \\ y &= \chi(u) + v\chi'(u) \\ z &= \psi(u) + v\psi'(u) . \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Darin bedeuten die Akzente die Ableitungen nach dem ersten Parameter $u$, und $v$ ist der zweite Parameter, der proportional ist der in immer demselben Sinne gemessenen Entfernung des laufenden Punktes $P(xyz)$ auf einer Tangente von ihrem Berührungspunkte $P(u)$.

Hält man einen beliebigen Parameterwinkel $u$ fest und läßt $v$ alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen, so durchläuft der Punkt $P(x, y, z)$ die ganze zum Raumkurvenpunkte $P(u)$ gehörige Tangente, d. h. *die Parameterkurven $u$ = konst. sind die Tangenten der Raumkurve, also die geradlinigen Erzeugenden der developpablen Tangentenflächen.*

Bleibt dagegen der Parameter $v$ unverändert und variiert $u$ von $-\infty$ bis $+\infty$, so entstehen *die Parameterkurven $v$ = konst.*, welche noch eingehender untersucht werden sollen.

Lassen wir nun unabhängig voneinander beide Parameter $u$ und $v$ unbeschränkt variieren, so erhält man ein System von Parameterlinien, bestehend aus zwei Scharen von je einfach unendlich vielen Kurven, durch welches jeder Punkt der Tangentenfläche eindeutig bestimmt ist. Somit sind die Gleichungen $(\alpha)$ die Parameterdarstellung der abwickelbaren Tangentenfläche.

Setzt man für die Funktionen $\varphi(u)$, $\chi(u)$ und $\psi(u)$ die unserer Raumkurve zukommenden Werte (2) ein, so wird *die Parameterdarstellung der vorliegenden Tangentenfläche*:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos u - v \sin u) \\ y &= b(\sin u + v \cos u) \\ z &= b^3 k \sin^2 u(\sin u + 3v \cos u) \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Die Gleichungen (2) der Raumkurve sind nur ein Spezialfall dieser Parameterformen, für welchen $v = 0$ gesetzt wird und der Parameter $u$ veränderlich ist. Die Raumkurve weist eben die besondere Eigenschaft auf, daß sie die *Gratlinie* der Tangentenfläche ist, die die beiden Mäntel derselben trennt. Von diesen Mänteln bezeichnen wir nun denjenigen, welcher durch die positiven Hälften der Tangenten gebildet wird, als positiv, und den anderen, welcher sich nach der entgegengesetzten Seite hin erstreckt, als negativ. Ist $v$ größer als Null, so liegt der zugehörige Flächenpunkt auf dem positiven Mantel, und Werten von $v$, die kleiner sind als Null, entsprechen Flächenpunkte auf dem negativen Mantel.

Die Parameterdarstellung (37) gibt uns auch in Bestätigung der schon gefundenen Resultate Aufschluß über *die Symmetrieverhältnisse der Tangentenfläche.*

1. Setzt man in ihr für $u$: $(180° + u)$, so erhalten die Koordinaten absolut gleichgroße, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werte, d. h. die Tangentenfläche liegt *zentrisch symmetrisch zum Koordinatenursprung.*

2. Führt man in (37) statt $u$ : $(180° - u)$ und statt $v$ : $(-v)$ ein, so bleiben die Werte der Koordinaten ungeändert mit Ausnahme von $x$, welche nur das Vorzeichen wechselt. Dies sagt aus, daß *die beiden Mäntel der Tangentenfläche in bezug auf die yz-Ebene symmetrisch zueinander liegen.* Demnach ist ihre gemeinsame Schnittkurve mit dieser Koordinatenebene, da jeder Punkt derselben beiden Mänteln angehören muß, *eine Doppelkurve der Tangentenfläche.*

3. Daß endlich *die x-Achse Symmetrieachse für beide Mäntel* der Tangentenfläche ist, lassen die Parametergleichungen (37) sofort erkennen, wenn in ihnen $u$ in $(-u)$ und $v$ in $(-v)$ übergeht: sämtliche Koordinaten bleiben dann dem absoluten Werte nach gleich, nur ändern noch $y$ und $z$ das Vorzeichen.

## § 8. Die Parameterkurven $v = \text{konst.}$

Setzt man für den Parameter $v$ den konstanten Wert $v = c$ in den Parametergleichungen (37) der Tangentenfläche ein, so werden *die Gleichungen der Parameterlinien* $v = konst.$:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos u - c \sin u) \\ y &= b(\sin u + c \cos u) \\ z &= b^3 k \sin^2 u(\sin u + 3c \cos u) \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Ihrer geometrischen Bedeutung nach sind diese Kurven der Ort sämtlicher Punkte $P(x, y, z)$ auf den Tangenten der Raumkurve, die alle den gleichen, stets in demselben Sinne gemessenen Abstand vom Berührungspunkte $P(u)$ haben. *Die Parameterlinien $v$ = konst. sind demnach gewundene Kurven, die ganz auf der Tangentenfläche liegen.* Zu ihnen gehört auch die ursprüngliche Raumkurve, für welche $c = 0$ ist. Positiven Werten von $c$ entsprechen Parameterkurven auf dem positiven Mantel, während die Parameterkurven $c$ = *neg.* dem negativen Mantel der Tangentenfläche angehören.

Ersetzt man in obigen Gleichungen $u$ durch $(180° + u)$, so erhalten die Koordinaten absolut gleichgroße, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werte, d. h. *sämtliche Parameterkurven $v$ = konst. sind symmetrisch zum Nullpunkt gebaut.*

Entsprechend den Symmetrieverhältnissen der beiden Mäntel der Tangentenfläche *liegen je zwei Parameterkurven $v$ = konst. = pos. und $v$ = konst. = neg.*, deren Parameter $c$ sich nur durch das Vorzeichen voneinander unterscheiden, *symmetrisch zueinander sowohl in bezug auf die yz-Ebene als auch in bezug auf die x-Achse*, wie sich in gleicher Weise wie oben mit Hilfe der Gleichungen (38) beweisen läßt.

### 1. Die Projektionen auf die $xy$-Ebene.

Als Gleichungen der Projektionen der Parameterkurven $v$ = *konst.* auf die $xy$-Ebene erhält man aus (38):

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos u - c \sin u) \\ y &= b(\sin u + c \cos u) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Eliminiert man aus diesen beiden Ausdrücken den Parameter $u$, so entsteht als *Gleichung der vorliegenden Projektionskurven in rechtwinkligen Koordinaten*:

$$\begin{aligned} &b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2(1 + c^2) \quad \text{oder} \\ &\frac{x^2}{a^2(1 + c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 + c^2)} = 1 , \end{aligned} \tag{40}$$

d. h. die Horizontalprojektionen der Parameterkurven $v$ = konst. bilden *eine Schar von konzentrischen Ellipsen* mit den gleichen Achsenrichtungen, den Halbachsen $a\sqrt{1 + c^2}$ bzw. $b\sqrt{1 + c^2}$, und der linearen Exzentrizität

$$e = \sqrt{(a^2 - b^2)(1 + c^2)} .$$

Da in diesen Ausdrücken die Konstante $c$ nur im Quadrat vorkommt, so bedeutet dies:

1. daß, wie es schon die Symmetrieverhältnisse der Parameterlinien $v$ = konst. erfordern, *die entsprechenden Grundrisse der Parameterkurven $c$ = pos. und $c$ = neg. zusammenfallen,*

2. daß *die Grundellipse*, die dem Werte $c = 0$ entspricht, *die kleinste Kurve der ganzen Schar darstellt.* Dies Resultat war zu erwarten, da die Tangenten der Raumkurve, auf denen der konstante Abstand $c$ abgetragen wird, in ihrer Projektion auf die $xy$-Ebene die Tangenten der Grundellipse ergeben, die sämtlich außerhalb derselben verlaufen. Daraus folgt wiederum, daß die Tangentenfläche selbst außerhalb des erzeugenden elliptischen Zylinders liegen muß.

Mit Hilfe obiger Werte für die Halbachsen läßt sich eine *neue Parameterdarstellung* der Projektionsellipsen in der $xy$-Ebene gewinnen, die für spätere Untersuchungen notwendig ist. Sie lautet:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u - ac\sin u = a\sqrt{1+c^2}\cos\varphi \\ y &= b\sin u + bc\cos u = b\sqrt{1+c^2}\sin\varphi\ , \end{aligned}\right\} \qquad (40a)$$

wenn der neue Parameterwinkel $\varphi$ die exzentrische Anomalie sämtlicher Projektionsellipsen bedeutet, die für $c = 0$ in $u$ übergeht, wie es für die Grundellipse der Fall ist.

Eliminiert man aus diesen Gleichungen nacheinander $\cos u$ und $\sin u$, so gelangt man zu den Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \sin u &= \frac{1-c}{\sqrt{1+c^2}}(\sin\varphi - \cos\varphi) \\ \cos u &= \frac{1-c}{\sqrt{1+c^2}}(\sin\varphi + \cos\varphi)\ , \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

durch welche die Gleichungen (40a) vollständig befriedigt werden.

## 2. Die Projektionen auf die $xz$-Ebene.

(Figurentafel II.)

Nach den Ausdrücken (38) lauten *die Gleichungen der Vertikalprojektionen der Parameterlinien $v$ = konst. = $c$*:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos u - c\sin u) \\ z &= b^3 k\sin^2 u(\sin u + 3c\cos u) \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Weil die Parameterlinien $v$ = konst. selbst *symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt* gebaut sind, so ist dies auch für die vorliegenden Projektionskurven der Fall.

Da ferner je zwei Parameterkurven $v = +c$ und $v = -c$ symmetrisch zueinander liegen in bezug auf die $yz$-Ebene und die $x$-Achse, so sind für die entsprechenden Aufrisse $c =$ pos. und $c =$ neg. *beide Koordinatenachsen Symmetrieachsen.* Durch eine halbe Drehung einer Hälfte der Projektionsebene um eine Koordinatenachse als Drehachse können somit die Projektionskurven $v = +c$ und $v = -c$ vollständig miteinander zur Deckung gebracht werden.

Diese durch rein geometrische Anschauung gewonnenen Eigenschaften über die Symmetrieverhältnisse der vorliegenden Projektionskurven lassen sich natürlich auch auf analoge Weise wie früher direkt aus obenstehenden Gleichungen herleiten.

Von den *Spezialfällen*, die man für besondere Werte des Parameters $u$ aus den Gleichungen (42) erhält, erwähnen wir die folgenden: 1. Für $u = 0°$, bzw. $u = 180°$, wird aus (42): $x = \pm a$; $z = 0$, unabhängig von $c$. Demnach *gehen alle Projektionskurven durch die beiden Punkte* $S_1(a, 0)$ und $S_2(-a, 0)$, *die Scheitel* der Gratlinie der abwickelbaren Tangentenfläche. In ihnen stehen nämlich die Tangenten senkrecht auf der Projektionsebene, so daß sich die Projektionen sämtlicher Raumkurven $v =$ konst. auf die $xz$-Ebene in den Durchstoßpunkten derselben durch obige Koordinatenebene, den Scheiteln $S_1$ und $S_2$, vereinigen müssen.

2. Setzt man in den Parametergleichungen (42) für $u = 45°$, so vereinfachen sie sich in

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}(1 - c)\,; \qquad z = \frac{b^3 k\sqrt{2}}{4}(1 + 3c)\,.$$

Durch Elimination von $c$ aus diesen beiden Ausdrücken entsteht die Gleichung

$$3b^3kx + 2az - 2ab^3k\sqrt{2} = 0\,. \tag{43}$$

d. h. *sämtliche Punkte der vorliegenden Projektionskurven, die zum Parameterwinkel* $u = 45°$ *gehören, liegen auf einer Geraden*, gegeben durch die Gleichung (43). Diese Gerade ist nun nach (25) identisch mit der Spurgeraden der Schmiegungsebene des Punktes $P(u = 45°)$ der ursprünglichen Raumkurve in der $xz$-Ebene. Diese Schmiegungsebene enthält zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Raumkurve, also auch zwei konsekutive Punkte aller Parameterkurven $v =$ konst.; da sie, wie früher festgestellt, senkrecht auf der $xz$-Ebene steht, so besitzt ihre Spurgerade in derselben zwei

aufeinanderfolgende Punkte sämtlicher vorliegender Projektionskurven. Somit ist die durch Gleichung (43) dargestellte Gerade *gemeinschaftliche Tangente aller Projektionskurven* in der $xz$-Ebene und berührt jede derselben in dem zum Parameterwinkel $u = 45°$ gehörenden Punkt.

Ebenso sind die Geraden

$$\left.\begin{aligned} -3b^3kx + 2az - 2ab^3k\sqrt{2} &= 0 \\ +3b^3kx + 2az + 2ab^3k\sqrt{2} &= 0 \\ -3b^3kx + 2az + 2ab^3k\sqrt{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (43a)$$

*gemeinschaftliche Tangenten sämtlicher Projektionskurven* in den Punkten bzw. von den Parametern

$$u = 135°,\ 225°,\ 315°.$$

3. Für die Werte $u = 90°$, bzw. $u = 270°$ werden die Parametergleichungen (42) zu

$$x = \mp ac; \quad z = \pm b^3k.$$

Daraus folgt, daß *der geometrische Ort aller Punkte der vorliegenden Projektionskurven, die zu den Parameterwinkeln $u = 90°$ bzw. $u = 270°$ gehören, je eine Gerade parallel zur x-Achse ist im Abstande $z = \pm b^3k$ von derselben.* Diese Eigenschaft der Projektionskurven rührt daher, daß die Tangenten in den beiden Polen $B_1(0,\ b,\ b^3k)$ und $B_2(0,\ b,\ b^3k)$ der ursprünglichen Raumkurve, die den obigen Parameterwerten entsprechen, und auf denen die Punkte $P(u = 90°)$ und $P(u = 270°)$ sämtlicher Parameterkurven $v =$ konst. liegen, parallel zur $x$-Achse verlaufen.

*Die Parameter der Schnittpunkte der vorliegenden Projektionskurven mit der x-Achse* liefert die Bedingung

$$z = b^3k \sin^2 u\,(\sin u + 3c \cos u) = 0. \qquad (44)$$

Sie verlangt

1. $\sin^2 u = 0$, $\sin u = 0$ doppelt, also
   $u + 0°$ und $u = 180°$, je doppelt,

unabhängig von $c$, d. h. sämtliche Punkte der Vertikalprojektionen haben in den beiden Scheiteln $S_1(u = 0°)$ und $S_2(u = 180°)$ zwei Punkte mit der $x$-Achse gemeinsam.

$$2. \quad \sin u + 3c \cos u = 0,$$
$$\operatorname{tg} u = -3c.$$

Da im Intervall von 0°—360° einem bestimmten Wert der trigonometrischen Tangente zwei um 180° verschiedene Winkel zugeordnet sind, liefert diese Gleichung immer zwei verschiedene Parameterwinkel für die Schnittpunkte mit der $x$-Achse, welche in gleichgroßer, aber entgegengesetzter Entfernung vom Koordinatenursprung liegen.

Für $c = 0$, den Aufriß der ursprünglichen Raumkurve, wird

$$\operatorname{tg} u = 0, \quad \text{also} \quad u = 0° \text{ und } 180°.$$

Berücksichtigt man noch die obige erste Bedingung der Gleichung (44), so folgt, daß diese Kurve, wie früher gefunden, in den beiden Scheiteln $S_1(u = 0°)$ und $S_2(u = 180°)$ zwei Spitzen besitzt mit der $x$-Achse als gemeinschaftlicher Spitzentangente.

*Die Parameter der Schnittpunkte mit der z-Achse* werden bestimmt aus der Gleichung:

$$x = a(\cos u - c \sin u) = 0,$$
$$c \sin u - \cos u = 0 \quad \text{oder}$$
$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{c},$$

die für jede Projektionskurve zwei um 180° verschiedene Parameterwinkel liefert, welchen zwei in gleichem Abstande aber auf entgegengesetzten Seiten vom Koordinatenursprung liegende Schnittpunkte entsprechen.

Weil je zwei Projektionskurven $c =$ pos. und $c =$ neg. symmetrisch zueinander liegen in bezug auf beide Koordinatenachsen, so sind die Schnittpunkte mit den Achsen beiden entsprechenden Kurven gemeinsam.

Die Schnittpunkte mit der $z$-Achse sind die Projektionen der reellen, in der $yz$-Ebene liegenden Schnittpunkte der entsprechenden Raumkurven $v =$ konst. $= +c$ und $v =$ konst. $= -c$, in welchen sich diese ihrer Symmetrie wegen in der $yz$-Ebene durchschneiden und in ihrer Aufeinanderfolge eine *Doppelkurve* der Tangentenfläche erzeugen.

Den gemeinsamen Schnittpunkten mit der $x$-Achse kommt keine derartige Bedeutung zu. Sie sind einfach die zusammenfallenden Projektionen je der beiden Punkte, in welchen eine Parameterkurve

$v = +c$ und die entsprechende $v = -c$ die $xz$-Ebene in gleichgroßer, aber entgegengesetzt zu messender Entfernung von der $x$-Achse durchstoßen.

Außer den Schnittpunkten in den beiden Koordinatenachsen sind, wie aus Figurentafel II ersichtlich, noch *andere Punkte vorhanden, in welchen sich die entsprechenden Projektionskurven $v$ = pos. und $v$ = neg. durchschneiden.* Wir wollen untersuchen, ob auch diese Schnittpunkte in Beziehung zu Doppelpunkten oder Doppelkurven der Tangentenfläche stehen. Wie früher bemerkt, stellen die Gleichungen (14):

$$y = \pm \frac{b}{a\sqrt{3}} x \tag{14}$$

die Vertikalprojektionen zweier in bezug auf die $yz$-Ebene symmetrisch zueinander gebauter ebener Doppelkurven der Tangentenfläche dar, welches zwei sich im Nullpunkt schneidende Geraden sind. Setzt man nun in diese Gleichungen für $x$ und $y$ die den vorliegenden Projektionskurven entsprechenden Werte (38) ein, so ergibt sich für die Bestimmung des der ersten Bedingung (14) genügenden Parameterwinkels $u_1$:

$$\frac{y}{x} = \frac{b(\sin u_1 + c \cos u_1)}{a(\cos u_1 - c \sin u_1)} = \frac{b}{a\sqrt{3}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\operatorname{tg} u_1 + c}{1 - c \operatorname{tg} u_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \text{Daraus folgt:}$$

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{1 - c\sqrt{3}}{c + \sqrt{3}},$$

oder, da wir die Sinusse und Kosinusse nötig haben,

$$\sin u_1 = \frac{1 - c\sqrt{3}}{2\sqrt{1 + c^2}}; \qquad \cos u_1 = \frac{c + \sqrt{3}}{2\sqrt{1 + c^2}}. \tag{45}$$

In gleicher Weise liefert die zweite der Gleichungen (14) die Werte:

$$\sin u_2 = \frac{1 + c\sqrt{3}}{2\sqrt{1 + c^2}}; \qquad \cos u_2 = \frac{c - \sqrt{3}}{2\sqrt{1 + c^2}}. \tag{45a}$$

wo zur deutlichen Unterscheidung die den beiden Bedingungen (14) entsprechenden Parameter mit $u_1$ und $u_2$ bezeichnet wurden.

Für die obigen Werte für $\sin u_1$ und $\cos u_1$ werden nun nach (38) die Koordinaten der Parameterkurven $v = c = pos.$:

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+c^2}; \qquad y = \frac{b}{2}\sqrt{1+c^2}; \qquad z = \frac{b^3 k}{8}\frac{(1-3c^2)^2}{(1+c^2)^{3/2}} \tag{46}$$

Genau dieselben Werte erhalten die Koordinaten der Parameterkurven $c = neg.$ für die Ausdrücke für $\sin u_2$ und $\cos u_2$, wenn in den Gleichungen (38) vorerst $u$ durch $(-u)$ ersetzt wird, d. h. die durch die Gleichungen (46) bestimmten Raumpunkte sind die Schnittpunkte je zweier entsprechender Parameterkurven $v =$ konst. $=$ pos. und $v =$ konst. $=$ neg., also *Doppelpunkte der Tangentenfläche*. Sie bilden in ihrer Aufeinanderfolge eine *Doppelkurve* derselben, längs welcher sich der positive und negative Mantel durchdringen. Eliminiert man aus den Ausdrücken für $x$ und $z$ die Konstante $c$, so entsteht eine Gleichung vierten Grades von der Form:

$$9b^3kx^4 - 4\sqrt{3}\,ax^3z - 18a^2b^3kx^2 + 9a^4b^3k = 0, \tag{47}$$

welche, wie sich später wieder bestätigt, die Projektion einer Doppelkurve der Tangentenfläche auf die $xz$-Ebene darstellt.

Auf ganz gleiche Art kann gezeigt werden, daß die durch Einsetzen der oben stehenden Werte (45a) für $\sin u_2$ und $\cos u_2$ in die Gleichungen (38) gebildeten Koordinaten der Parameterkurven $v =$ konst. $=$ pos.:

$$x = -\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+c^2}; \qquad y = \frac{b}{2}\sqrt{1+c^2}; \qquad z = \frac{b^3 k}{8}\frac{(1-3c^2)^2}{(1+c^2)^{3/2}} \tag{48}$$

*Doppelpunkte* der Tangentenfläche bestimmen, erzeugt durch den Schnitt zweier entsprechender Parameterkurven $c =$ pos. und $c =$ neg., und daß die Gleichung

$$9b^3kx^4 + 4\sqrt{3}ax^3z - 18a^2b^3kx^2 + 9a^4b^3k = 0 \tag{49}$$

den Aufriß der durch sie gebildeten Doppelkurve der Tangentenfläche darstellt. Wir gelangen also zu dem Resultat: Diejenigen Punkte der Aufrisse der Parameterkurven $v =$ konst., in welchen sich je eine Projektionskurve $c =$ pos. und $c =$ neg. außer in den beiden Koordinatenachsen durchschneiden, sind die Projektionen entsprechender *Punkte zweier Doppelkurven* der Tangentenfläche. Sie liegen auf zwei symmetrisch zueinander in bezug auf die $z$-Achse

gebauten *Kurven vierten Grades*, den Projektionen dieser Selbstdurchdringungskurven auf die $xz$-Ebene.

Zur weiteren Untersuchung der Vertikalprojektionen der Parameterlinien $v =$ konst. bedürfen wir der beiden ersten nach $u$ genommenen Differentialquotienten der Koordinaten $x$ und $y$. Mit Hilfe der Gleichungen (42) findet man:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{du} = -a(\sin u + c\cos u); \qquad \frac{d^2x}{du^2} = -a(\cos u - c\sin u) \\ &\frac{dz}{du} = 3b^3k\sin u(2c\cos^2 u + \sin u\cos u - c\sin^2 u) \\ &\frac{d^2z}{du^2} = -3b^3k(\sin^3 u + 7c\sin^2 u\cos u - 2\sin u\cos^2 u - 2c\cos^3 u) \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Die Parameterwinkel der *Extremwerte der vorliegenden Projektionskurven für die Abszissen* ergeben sich aus der Bedingung $\frac{dx}{du} = 0$, also aus

$$+a(\sin u + c\cos u) = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} u = -c. \qquad (51)$$

Diese Gleichung liefert für jede Projektionskurve zwei verschiedene Parameter, also auch zwei absolute Maxima der Abszissen, die symmetrisch zueinander in bezug auf den Nullpunkt liegen.

Wir suchen noch den *geometrischen Ort dieser Extremwerte* aller Vertikalprojektionen und setzen zu diesem Zwecke in den Gleichungen (42) für den Parameter $c$ den Wert

$$c = -\operatorname{tg} u = -\frac{\sin u}{\cos u}$$

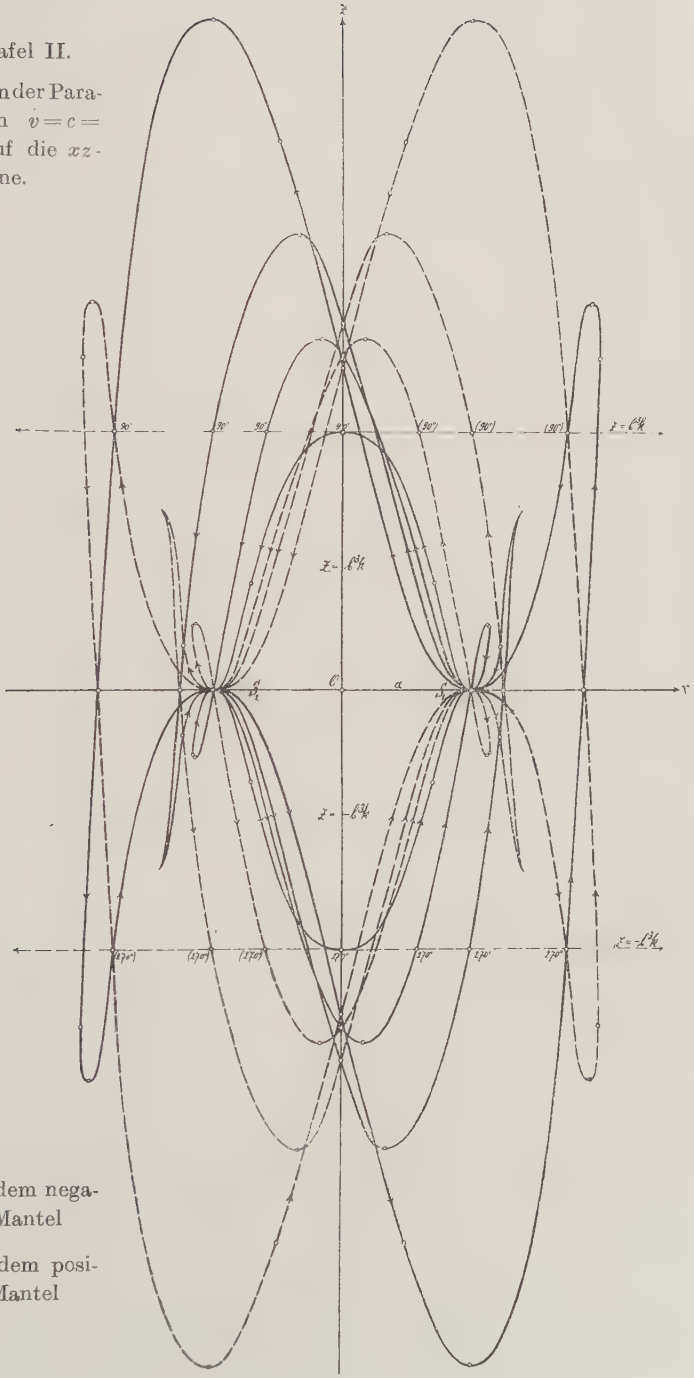
ein. Dann werden ihre Koordinaten zu:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\left(\cos u + \frac{\sin^2 u}{\cos u}\right) = \frac{a}{\cos u} \\ z &= b^3k\sin^2 u(\sin u - 3\sin u) = -2b^3k\sin^3 u. \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Für den Wert $c = -\operatorname{tg} u$ verschwindet aber nach den Gleichungen (38) die Koordinate $y$. Dieser Wert ist demnach auch gleichzeitig die Bedingung für den Schnitt aller Parameterlinien $v =$ konst. mit der $xz$-Ebene, welch letzterer aber identisch ist mit der Schnittkurve der Tangentenfläche in dieser Ebene. Somit ergibt sich der bemerkenswerte Satz: diejenigen Punkte der Aufrisse der Para-

Figurentafel II.

Projektionen der Parameterkurven $v = c =$ konstant auf die $xz$-Ebene.



—— auf dem negativen Mantel

— — auf dem positiven Mantel

meterlinien $v = \text{konst.}$, deren Abszissen Extremwerte aufweisen, sind identisch mit den Punkten, in welchen die Abszissen der Parameterkurven $v = \text{konst.}$ selbst ihre absoluten Maxima erreichen. Diese Extremwerte liegen somit in der $xz$-Ebene und *ihr geometrischer Ort fällt zusammen mit der Spurkurve der Tangentenfläche in dieser Ebene*, dargestellt durch die Parametergleichungen (52).

*Die Extremwerte für die Ordinaten* findet man aus der Beziehung

$$\frac{dz}{du} = 3b^3 k \sin u \,(2c \cos^2 u + \sin u \cos u - c \sin^2 u) = 0. \quad (53)$$

Sie verlangt $\qquad 1.\ \sin u = 0,$

$$u = 0^\circ \text{ und } u = 180^\circ,$$

unabhängig von $c$. Da diesen Parameterwinkeln die Scheitel $S_1(a, 0)$ und $S_2(-a, 0)$ entsprechen, so folgt, *daß jede Projektionskurve in den beiden Scheiteln einen Extremwert der Ordinate erreicht*, und zwar ist, der zentrischen Symmetrie wegen, der eine von ihnen ein Maximum, der andere ein Minimum. Weil je zwei entsprechende Projektionskurven $v = +c$ und $v = -c$ achsensymmetrisch zueinander liegen, so besitzt die eine Kurvenschar in demjenigen Scheitel ein Maximum, in welchem die andere Schar ein Minimum aufweist und umgekehrt. *Die x-Achse ist gemeinschaftliche Doppeltangente sämtlicher Projektionskurven in den Scheiteln $S_1$ und $S_2$.*

Überträgt man diese Eigenschaften auf den Raum und berücksichtigt, daß aus der zweiten der Parametergleichungen (38) für $u = 0^\circ$

$$y = +bc$$

wird, so erkennt man leicht, daß sämtliche Parameterkurven $c = \text{pos.}$ die $xy$-Ebene längs der Geraden

$$x = a, \quad z = 0$$

im ersten, die Parameterkurven $c = \text{neg.}$ dagegen im achten Oktanten berühren.

In gleicher Weise findet man, daß diese Koordinatenebene längs der Geraden

$$x = -a, \quad z = 0$$

von den Kurven $c = \text{pos.}$ im siebenten, und von den Kurven $c = \text{neg.}$ im zweiten Oktanten berührt wird.

*Die xy-Ebene ist somit*, wie schon früher festgestellt, *Doppeltangentialebene der Tangentenfläche* und berührt sie längs der beiden unter sich und zur $y$-Achse parallelen Geraden

$$x = \pm a, \quad z = 0.$$

Es mag noch erwähnt werden, daß die beiden Scheitel $S_1(a, 0)$ und $S_2(-a, 0)$ für die Projektionskurven

$$c = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

zugleich *Knotenpunkte* sind mit der $x$-Achse als gemeinschaftlicher Doppelpunktstangente.

Gleichung (53) erfordert:

$$2. \quad c \sin^2 u - \sin u \cos u - 2c \cos^2 u = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg}^2 u - \frac{1}{c} \operatorname{tg} u - 2 = 0$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{2c}\left(1 \pm \sqrt{1 + 8c^2}\right).$$

Diese Bedingung liefert zwei Parameterwinkel, also vier weitere absolute Maximalwerte der Ordinaten, die stets reell sind, da der Parameter $c$ unter der Wurzel im Quadrat auftritt.

Jede der vorliegenden Projektionskurven besitzt somit sechs reelle Extremwerte für die Ordinaten: drei Maxima und drei Minima, wovon je einer in den Scheiteln $S_1(a, 0)$ und $S_2(-a, 0)$ liegt.

Zur Bestimmung der Parameter der *Wendepunkte* erhält man die Gleichung vierten Grades

$$(1 + c^2) \operatorname{tg}^4 u + 6c \operatorname{tg}^3 u + (5c^2 - 1) \operatorname{tg}^2 u - 2c \operatorname{tg} u - 2c^2 = 0. \quad (54)$$

Sie liefert im allgemeinen vier verschiedene Werte für die trigonometrische Tangente, also acht verschiedene Parameterwinkel, von denen ein Teil imaginär sein kann. Ihnen entsprechen acht Wendepunkte der Projektionskurven in der $xz$-Ebene, in denen aber auch die Spitzen inbegriffen sind, für welche dann je zwei dieser Parameterwerte zusammenfallen.

Für $c = 0$, den *Aufriß der Gratlinie der Tangentenfläche*, erhält man aus obiger Gleichung, wie schon früher gefunden, zwei Spitzen in den Scheiteln $S_1(u = 0°)$ und $S_2(u = 180°)$, und vier symmetrisch

zu den Koordinatenachsen liegende Wendepunkte, die zu den Parametern $u = 45°$, $135°$, $225°$ und $315°$ gehören.

Auch für den besonderen Fall der *Projektionskurve* $c = 1$ läßt sich die Bestimmungsgleichung für die Wendepunkte (54) einfach auflösen. Sie reduziert sich auf:

$$\operatorname{tg}^4 u + 3\operatorname{tg}^3 u + 2\operatorname{tg}^2 u - \operatorname{tg} u - 1 = 0\,.$$

Diese Gleichung vierten Grades kann nun geschrieben werden in der Form:

$$(\operatorname{tg} u - 1)^2 (\operatorname{tg}^2 u + \operatorname{tg} u - 1) = 0\,.$$

Sie zerfällt also in die beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} u = 1, \quad \text{doppelt,} \quad \text{und}$$
$$\operatorname{tg}^2 u + \operatorname{tg} u - 1 = 0,$$

deren Wurzeln auf die Parameterwinkel

$u_1 = 135°$ und $u_2 = 315°$ je doppelt, bzw.
$u_3 = 31°\ 39'\ 31''$; $u_4 = 121°\ 43'\ 03''$
$u_5 = 211°\ 39'\ 31''$; $u_6 = 301°\ 43'\ 03''$

führen. Nur die vier letzteren Werte liefern *Wendepunkte der Projektionskurve* $c = 1$, während die beiden ersten, in welchen je zwei Parameterwinkel zusammenfallen, die Punkte $P_1(u = 135°)$ und $P_2(u = 315°)$ mit den Koordinaten

$$x = \mp a\sqrt{2}\,, \qquad z = \mp \frac{b^3 k \sqrt{2}}{2}$$

ergeben. Ihre Parameter genügen aber auch den Bedingungsgleichungen (51) und (53), d. h. die Punkte $P_1$ und $P_2$ weisen zugleich noch die Extremwerte der Abszissen und Ordinaten auf. Dies ist aber nur möglich, wenn sie Spitzen sind.

Zu denselben Resultaten gelangt man auch auf folgende Art: Setzt man in der Gleichung für den Richtungskoeffizienten der Tangente:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} : \frac{dx}{du} = \frac{3b^3 k}{-a} \cdot \frac{\sin u\,(2c\cos^2 u + \sin u \cos u - c\sin^2 u)}{c\cos u - c\sin u}$$

für $c = 1$ und $u = 135°$, so nimmt dieser die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Weil somit die Tangentenrichtung und also auch die Tangente selbst unbestimmt werden, so ist der untersuchte Punkt ein Doppelpunkt. Den wahren Wert des obigen Ausdrucks erhält man da-

durch, daß man Zähler und Nenner für sich nach dem Parameter $c$ differenziert und durcheinander dividiert. Dann entsteht:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3\,b^3 k}{a}(3\cos^2 u - 1)\,.$$

Gibt man nun dem Parameterwinkel den Wert $u = 135°$, so wird der Richtungskoeffizient zu

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3\,b^3 k}{2\,a}\,.$$

Unter Benützung dieses Ausdruckes erhält man als Gleichung der Tangente des Doppelpunktes $P_1$:

$$3\,b^3 k x - 2\,a z + 2\sqrt{2}\,a b^3 k = 0\,,$$

in Übereinstimmung mit dem früher gefundenen Resultat (Gleichungen 43a). Da der Doppelpunkt $P_1$ nur zu einem Parameterwinkel gehört und nur eine Tangentenrichtung, also auch nur eine Tangente in ihm möglich ist, muß er eine *Spitze* sein. Das gleiche gilt für den Punkt $P_2(u = 315°)$.

Aus analogen Gründen sind auch die Punkte $P_1'(u = 45°)$ und $P_2'(u = 225°)$ *Spitzen der Projektionskurve* $c = -1$.

Die Figurentafel II, welche die Aufrisse der sieben Parameterkurven

$$v = \text{konst.} = 0\,, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,, \pm 1\,, \pm\sqrt{3}$$

enthält, läßt den schön gesetzmäßigen Bau dieser in sich geschlossenen Projektionskurven in deutlicher Weise erkennen. Man bemerkt sofort, daß mit absolut kleiner werdendem Parameter $c$, gemäß dessen Bedeutung, auch die Kurvenäste immer kleiner werden und sich gegen den Aufriß der Gratlinie der Tangentenfläche zu drängen, in welchem sich dann für $c = 0$ die Projektionskurven $c =$ pos. und $c =$ neg. vereinigen. Die Ausbuchtungen im ersten und dritten Quadranten bei den Kurven mit positivem, im zweiten und vierten Quadranten bei denjenigen mit negativem Parameter $c$, die je einen offenen Wulst bilden, verengern sich allmählich, laufen für $c = \pm 1$ in scharfe Spitzen aus und gehen dann je in eine durch einen Doppelpunkt geschlossene Schleife über. Diese zieht sich immer mehr zusammen, um für $c = 0$ in den Scheiteln $S_1$ und $S_2$ zusammen zu schrumpfen.

### 3. Die Projektionen auf die $yz$-Ebene.

(Figurentafel III.)

Aus den Ausdrücken (38) erhält man als *Parametergleichungen der Projektionen der Parameterkurven $v$ = konst. auf die $yz$-Ebene*:

$$\left.\begin{aligned} y &= b\,(\sin u + c\cos u) \\ z &= b^3 k \sin^2 u\,(\sin u + 3c\cos u) \end{aligned}\right\} \quad \cdot \quad (55)$$

Da die Parameterkurven $v$ = konst. selbst *zentrisch symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt* liegen, so gilt diese Eigenschaft auch für ihre Seitenrisse. Dabei beträgt die Differenz der Parameterwinkel je zweier zentrisch symmetrisch zueinander angeordneter Kurvenpunkte 180°, wie mit Hilfe der Gleichungen (55) gezeigt werden kann, wenn in ihnen statt $u : (180 + u)$ gesetzt wird.

Weil ferner je zwei entsprechende Parameterkurven $v$ = konst. $= +c$ und $v$ = konst. $= -c$, deren Parameter sich also nur durch das Vorzeichen voneinander unterscheiden, in bezug auf die $yz$-Ebene symmetrisch gebaut sind, so *fallen ihre Projektionen auf diese Koordinatenebene zusammen*. Dies ergibt sich auch aus den Parametergleichungen (55), wenn man in ihnen für $u$: $(180 - u)$ und für $c : (-c)$ einführt: die beiden Koordinaten $y$ und $z$ bleiben ungeändert. Ein Punkt der vorliegenden Kurven ist also die gemeinschaftliche Projektion zweier Punkte der Raumkurven $v = \pm c$, deren Parameterwinkel supplementär sind. Mit wachsendem Parameter wird daher die gemeinsame Projektionskurve in zueinander entgegengesetztem Sinne durchlaufen, wenn sie als Seitenriß der einen oder der anderen Parameterkurve $v = \pm c$ betrachtet wird.

Setzt man in den oben stehenden Parametergleichungen für

$$u = 0°, \text{ bzw. } u = 180°,$$

so folgt:

$$y = \pm bc, \quad z = 0;$$

d. h. die den Parameterwinkeln $u = 0°$ und 180° entsprechenden Punkte der vorliegenden Kurven liegen sämtlich auf der $y$-Achse: ihre Abstände vom Nullpunkt wachsen mit größer werdendem $c$ linear nach beiden Seiten ins Unendliche. Diese Eigenschaft rührt daher, daß die entsprechenden Punkte der Parameterlinien selbst den beiden Tangenten in den Scheiteln $S_1(u = 0°)$ und $S_2(u = 180°)$ der ursprünglichen Raumkurve: $x = \pm a$, $z = 0$, angehören, welche ganz in der $xy$-Ebene liegen und bei Projektion auf die $yz$-Ebene in der $y$-Achse zusammenfallen.

Für $u = 90°$ bzw. $u = 270°$ liefern die Gleichungen (55) die Werte

$$y = \pm b; \quad z = \pm b^3 k,$$

unabhängig von $c$. Demnach *gehen alle Projektionskurven durch die* Punkte $B_1(0, b, b^3k)$ und $B_2(0, -b, -b^3k)$, *die beiden Pole der Gratlinie der Tangentenfläche.* Auch dies Resultat erklärt sich geometrisch auf einfache Weise: In den beiden Polen stehen die Tangenten der ursprünglichen Raumkurve senkrecht auf der $yz$-Ebene, so daß sie bei Projektion auf diese mitsamt der in ihnen enthaltenen, sämtlichen Parameterkurven $v$ = konst. angehörenden Punkten $P(u = 0°)$ und $P(u = 180°)$ in ihren Spurpunkten in der vorliegenden Projektionsebene zusammenschrumpfen.

Zur Bestimmung der Parameter der *Schnittpunkte der Projektionskurven mit der y-Achse* gilt wieder Gleichung (44), als deren Wurzeln wir fanden

1. $u = 0°$ und $u = 180°$ je doppelt,
2. $\operatorname{tg} u = -3c$.

Nach der ersten Bedingung schneidet die $y$-Achse jede der vorliegenden Kurven in zwei je doppelt zu zählenden Punkten, die sich in gleicher Entfernung, aber auf verschiedenen Seiten vom Koordinatenursprung befinden.

Außerdem sind nach der zweiten Bedingung noch zwei weitere, ebenfalls zentrisch-symmetrisch zueinander liegende Schnittpunkte auf der $y$-Achse vorhanden.

Für $c = 0$, den Seitenriß der Gratlinie der Tangentenfläche, fallen je drei Schnittpunkte im Nullpunkt zusammen. Dieser ist Wendepunkt der doppelt zu zählenden Grundparabel mit der Abszissenachse $y$ als Wendetangente.

Die Parameter der *Schnittpunkte* der vorliegenden Projektionskurven *mit der z-Achse* ergeben sich aus der Gleichung

$$y = b(\sin u + c \cos u) = 0, \text{ also aus}$$
$$\operatorname{tg} u = -c.$$

Somit schneidet jede Projektionskurve die Ordinatenachse in zwei gleichweit vom Koordinatenursprung entfernten Punkten. Obige Beziehung für $\operatorname{tg} u$ stimmt nun mit Gleichung (51) überein, welche die Parameterwinkel derjenigen Punkte der Projektionskurven $v$

konst. in der $xz$-Ebene bedingt, deren Abszissen Extremwerte darstellen. Diese Eigenschaft rührt daher, daß die vorliegenden Schnittpunkte mit der $z$-Achse die Projektionen dieser Extremwerte sind, welch letztere, wie früher gezeigt wurde, die in der $xz$-Ebene liegenden absoluten Maxima für die Abszissen der Parameterkurven $v = \text{konst.}$ selbst darstellen.

Die Parameter derjenigen *Kurvenpunkte, deren Abszissen Extremwerte* aufweisen, liefert die Gleichung

$$\frac{dy}{du} = b\,(\cos u - c \sin u) = 0\,, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{c}\,.$$

Demnach besitzen die vorliegenden Projektionskurven je zwei zum Nullpunkt symmetrisch angeordnete Extremwerte der Abszissen, also je ein Maximum und ein Minimum.

Den *geometrischen Ort dieser Punkte* erhält man durch Substitution des Wertes

$$c = \frac{1}{\operatorname{tg} u} = \frac{\cos u}{\sin u}$$

in Gleichung (55). Er wird dargestellt durch:

$$\left.\begin{aligned} y &= b\left(\sin u + \frac{\cos^2 u}{\sin u}\right) = \frac{b}{\sin u} \\ z &= b^3 k \sin^2 u \left(\sin u + \frac{3\cos^2 u}{\sin u}\right) = b^3 k \sin u\,(3 - 2\sin^2 u) \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Der obige Wert für $c$ ist aber nach (38) auch die Bedingung für das Verschwinden der Koordinate $x$ der entsprechenden Parameterkurven $v = \text{konst.}$ selbst. Somit gilt auch hier in Analogie zu den Projektionskurven in der $xz$-Ebene das Resultat: *Der geometrische Ort der absoluten Maxima für die Abszissen der Projektionskurven $v = \text{konst.}$ in der $yz$-Ebene ist identisch mit der Ortskurve der entsprechenden Extremwerte der Parameterlinien $v = \text{konst.}$ selbst, also auch mit der Spurkurve der Tangentenfläche in der $yz$-Ebene.* Daraus folgt die weitere analoge Eigenschaft, daß die Schnittpunkte der Vertikalprojektionen der Parameterkurven $v = \text{konst.}$ mit der $z$-Achse die Projektionen der obengenannten Extremwerte sind.

Figurentafel III.

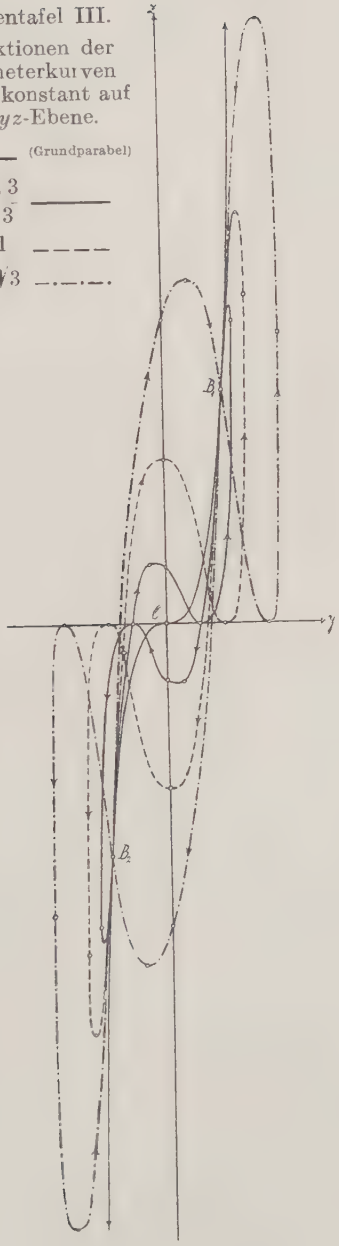
Projektionen der Parameterkurven $v = c =$ konstant auf die $yz$-Ebene.

$c = 0$ (Grundparabel)

$c = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$c = \pm 1$

$c = \pm \sqrt{3}$



Zur Ermittlung der *Kurvenpunkte mit maximaler und minimaler Ordinate* gilt auch hier Gleichung (53), deren Wurzeln lauten:

1. $\sin u = 0$, also $u = 0°$ und $u = 180°$, unabhängig von $c$;

2. $\operatorname{tg} u = \frac{1}{2c}(1 \pm \sqrt{1 + 8c^2})$.

Die erste Bedingung sagt aus, daß jede Kurve in der $y$-Achse, mit welcher sie, wie früher gefunden, je zwei Punkte gemeinsam hat, je ein Maximum und ein Minimum der Ordinate besitzt. *Die Abszissenachse ist also Doppeltangente sämtlicher Projektionskurven*, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die $xy$-Ebene Doppeltangentialebene der Tangentenfläche ist.

Nach der zweiten Bedingung sind noch vier weitere, paarweise zentrisch-symmetrisch liegende Extremwerte für jede Kurve vorhanden, also je zwei Maxima und zwei Minima.

Für $c = 0$, die doppelt zu zählende Grundparabel, fallen zweimal zwei Extremwerte im Nullpunkt, dem Wendepunkt, zusammen, während für die beiden übrigen die Gleichung

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{c}_{c=0} = \infty$$

die Parameterwinkel $u = 90°$ und $u = 180°$ ergibt, denen die Pole $B_1$ und $B_2$ entsprechen. Diese sind, wie später gezeigt wird, Zwickpunkte der Tangentenfläche, in welchen der reelle und imaginäre Teil derselben zusammentreffen. Die beiden Pole bilden also auch die Grenze zwischen den reellen Parameterkurven, die auf dem reellen Teil der Tangentenfläche liegen, und den imaginären Parameterlinien, die dem imaginären Teile derselben angehören.

Zur Bestimmung der Parameter der *Wendepunkte* gilt die Gleichung

$$\cos u(3c^2 \sin^3 u - 3c \sin^2 u \cos u + \sin u \cos^2 u + c \cos^3 u) = 0 \quad (57)$$

Sie verlangt

1. $\cos u = 0$, also $u = 90°$ und $u = 270°$,

unabhängig vom Parameter $c$; d. h. die Punkte $B_1(u = 90°)$ und $B_2(u = 270°)$, *die Pole der Gratlinie der Tangentenfläche*, denen bzw. die Koordinaten $y = \pm b$, $z = -b^3k$ zukommen, *sind ge-*

*meinschaftliche Wendepunkte sämtlicher Seitenrisse der Parameterkurven* $v = \text{konst.}$

Um die Gleichungen der zugehörigen *Wendetangenten* aufzustellen, bilden wir vorerst allgemein die Gleichung der Kurventangente im Punkte $P(u)$. Sie lautet:

$$\left.\begin{aligned} &3b^2k\sin u(c\sin^2 u - \sin u\cos u - 2c\cos^2 u)\cdot y + (\cos u - c\sin u)\cdot z \\ &2b^3k\sin u(-c\sin^3 u - \sin^2 u\cos u + 3c\sin u\cos^2 u + 3c^2\cos^3 u) = 0 \end{aligned}\right\} (58)$$

Setzt man nun hierin für $u = 90^\circ$, bzw. $u = 270^\circ$, so werden bzw. die Gleichungen der Inflexionstangenten in den beiden Polen $B_1$ und $B_2$:

$$3b^2ky - z \mp 2b^3k = 0 \qquad (58a)$$

Weil der Parameter $c$ in diesen Ausdrücken fehlt, so folgt wiederum, daß die durch sie dargestellten Wendetangenten sämtlichen Projektionskurven angehören. Die beiden Inflexionstangenten sind nun nach den Gleichungen (29) identisch mit den in der $yz$-Ebene liegenden Spurgeraden der Wendeberührungsebenen der beiden Pole, welch letztere Oskulationspunkte der ursprünglichen Raumkurve sind. Diese Eigenschaft gibt uns nun Aufschluß über die geometrische Entstehung der vorliegenden Inflexionspunkte $B_1$ und $B_2$. Die Wendeberührungsebenen der beiden Pole, in denen zwei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen zusammenfallen, enthalten je drei konsekutive Tangenten der Raumkurve, also auch je drei unmittelbar aufeinanderfolgende Punkte sämtlicher Parameterlinien $v = \text{konst.}$ Da nun diese beiden stationären Ebenen senkrecht auf der $yz$-Ebene stehen, so fallen bei Projektion auf dieselbe je die beiden konsekutiven, durch die obengenannten drei Punkte bestimmten Tangenten der Parameterlinien $v = \text{konst.}$ in den Spurgeraden (58a) der beiden stationären Ebenen zusammen. Diese Geraden vereinigen somit in sich je zwei aufeinanderfolgende Tangenten und enthalten drei aufeinanderfolgende Punkte sämtlicher Projektionskurven. Sie sind also Inflexionstangenten und ihre Berührungspunkte Wendepunkte sämtlicher Seitenrisse der Parameterlinien $v = \text{konst.}$

Im Raume gedeutet, heißt das: Die beiden durch die Gleichungen (58a) dargestellten Ebenen sind *Wendetangentialebenen* der Tangentenfläche bzw. mit den zur $x$-Achse parallel verlaufenden Geraden

$$y = \pm b, \quad z = \pm b^3k$$

als *Wendeerzeugenden*, wie schon früher festgestellt.

Da für die Grundparabel, $c = 0$, welche doppelt zu zählende Projektionskurve ist, die beiden Pole zwei in der $yz$-Ebene liegende Zwickpunkte besonderer Art der Tangentenfläche sind, so kommt, wie später ausgeführt wird, für diesen Spezialfall in ihnen die Eigenschaft der Wendepunkte nicht zur Geltung.

Weil die übrigen vier stationären Ebenen der Raumkurve oder Wendetangentialebenen der Tangentenfläche (28) nicht senkrecht auf der Projektionsebene stehen, so entsprechen den zu ihnen gehörigen Raumkurventangenten bzw. Wendegeraden, keine Inflexionspunkte der vorliegenden Projektionen in der $yz$-Ebene.

Aus demselben Grunde weisen auch im allgemeinen die Vertikalprojektionen der Parameterlinien $v =$ konst. in allen sechs Punkten, welche die Projektionen der den sämtlichen Wendegeraden der Tangentenfläche angehörenden Punkte der Parameterkurven $v =$ konst. sind, keine Wendepunkte auf.

Gleichung (57) verlangt

$$2.\quad 3c^2 \sin^3 u - 3c \sin^2 u \cos u + \sin u \cos^2 u + c \cos^3 u = 0\,, \qquad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg}^3 u - \frac{1}{c} \operatorname{tg}^2 u + \frac{1}{3c^2} \operatorname{tg} u + \frac{1}{3c} = 0\,.$$

Diese Gleichung dritten Grades in $\operatorname{tg} u$ liefert im allgemeinen sechs verschiedene Parameterwinkel, welchen sechs paarweise symmetrisch zum Nullpunkt liegende Wendepunkte entsprechen. Um die Realität der Wurzeln obiger Gleichung zu untersuchen, führen wir in ihr die Substitution ein:

$$\operatorname{tg} u = x + \frac{1}{3c}\,.$$

Dann wird sie eine rein kubische Gleichung:

$$x^3 + \frac{1 + 9c^2}{27c^3} = 0\,, \qquad \text{also}$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{-1 - 9c^2}}{-3c}\,.$$

Für $x$ erhält man somit immer einen reellen und zwei konjugiert imaginäre Werte, also auch für $\operatorname{tg} u$.

Die Projektionen der Parameterlinien $v =$ konst. auf die $yz$-Ebene besitzen demnach *außer in den beiden Polen* $B_1(u = 90°)$ *und* $B_2(u = 270°)$ *noch je zwei weitere, zentrisch-symmetrisch zu-*

*einander angeordnete reelle* und vier paarweise konjugiert imaginäre *Wendepunkte.*

Für $c = 0$, den doppelt gelegten Seitenriß der Gratlinie der Tangentenfläche, fallen die zwei weiteren reellen Wendepunkte im Koordinatenursprung zusammen; die Werte der Parameterwinkel der beiden übrigen reellen Inflexionsstellen für die anderen sechs in der Figurentafel III gezeichneten Projektionskurven sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

| $c = \pm 1$ | $c = \pm \sqrt{3}$ | $c = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
|---|---|---|
| 158° 57′ 10″ | 158° 35′ 40″ | 161° 15′ 50″ |
| 338° 57′ 10″ | 338° 35′ 40″ | 341° 15′ 50″ |

Wie aus der Figurentafel III hervorgeht, besitzt jede Projektionskurve $v =$ konst. in der $yz$-Ebene zwei zentrisch-symmetrisch zueinanderliegende *Doppelpunkte.* Wir wollen untersuchen, ob auch sie in Beziehung zu Doppelpunkten und Doppelkurven der Tangentenfläche stehen, und greifen daher auf die Gleichungen (45) und (45a) zurück, welche die Bedingungen für die Parameterwinkel $u_1$ und $u_2$ zweier solcher Doppelkurven darstellen. Setzt man die Werte für $\sin u_1$ und $\cos u_1$, ebenso diejenigen für $\sin u_2$ und $\cos u_2$ in die Gleichungen (55) der vorliegenden Projektionskurven ein, so erhält man für diese beiden voneinander verschiedenen Parameterwinkel $u_1$ und $u_2$ dieselben Koordinaten:

$$y = \frac{b}{2}\sqrt{1 + c^2}; \qquad z = \frac{b^3 k}{8}\frac{(1 - 3c^2)^2}{(1 + c^2)^{3/2}} \tag{59}$$

d. h. die durch diese Koordinaten bestimmten Punkte sind *Doppelpunkte* der Projektionskurven $v =$ konst. in der $yz$-Ebene. Die Gleichung ihrer Ortskurve in rechtwinkligen Koordinaten ergibt sich durch Elimination von $c$ aus obigen beiden Ausdrücken. *Als geometrischen Ort der Doppelpunkte* der Seitenrisse aller Parameterkurven $v =$ konst. erhält man eine *Kurve vierten Grades*, dargestellt durch die Gleichung

$$4y^3 z = b^2 k(b^2 - 3y^2)^2, \tag{59a}$$

welche, wie später gezeigt wird, der gemeinschaftliche Seitenriß zweier zur $yz$-Ebene symmetrisch gebauter Doppelkurven der Tangentenfläche ist.

Es mag noch beigefügt werden, daß für die Projektionskurven $c = \pm\sqrt{3}$ je die beiden Doppelpunkte mit den Wendepunkten $B_1$ und $B_2$ zusammenfallen und somit einfache Inflexionsknoten derselben sind.

Figurentafel III, welche die Seitenrisse der sieben Parameterlinien

$$v = \text{konst.} = 0\,, \quad \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \quad \pm 1\,, \quad \pm\sqrt{3}$$

enthält, von denen diejenigen, deren Parameter $c$ sich nur dem Vorzeichen nach voneinander unterscheiden, identisch sind, zeigt deutlich den regelmäßigen Aufbau dieser Kurven. Sie sind alle in sich geschlossen und bestehen aus je drei in den Doppelpunkten zusammenhängenden Schleifen, von welchen die beiden äußeren, zueinander symmetrisch liegenden, auf einer Seite von der $y$-Achse begrenzt werden, während sich ihre anderen Enden mit wachsendem $c$ immer weiter von der $y$-Achse entfernen. Nimmt der Parameter $c$ dem absoluten Werte nach ab, so ziehen sich die Schleifen immer mehr zusammen und schmiegen sich der Grundparabel immer enger an, um endlich, wenn $c = 0$ geworden, in derselben als doppelt zu zählenden Parameterkurve zusammenzufallen.

**Die Gleichungen der Projektionskurven $v$ = konst. in rechtwinkligen Koordinaten.**

Die Projektionen der Parameterlinienschar $v$ = konst. auf die $xz$- und $yz$-Ebene weisen je sechs im Endlichen liegende Schnittpunkte mit der jeweiligen Abszissenachse auf, dagegen je nur zwei mit der Ordinatenachse. Zieht man ferner in Betracht, daß der Aufriß der Parameterlinie $c = 0$, also der Gratlinie der abwickelbaren Tangentenfläche, eine Kurve sechster Ordnung ist mit dem unendlich fernen Punkte der $z$-Achse als vierfachen Kurvenpunkt, und daß auch die Grundparabel, die als doppelt gelegter Seitenriß der Parameterlinie $v$ = konst. = 0 zählt, vom dritten Grade ist und im unendlich fernen Punkt der $z$-Achse eine Spitze aufweist, so ist der Schluß berechtigt, daß sämtliche Projektionskurven $v$ = konst. auf die $xz$- und $yz$-Ebene Kurven sechster Ordnung sind mit dem unendlich fernen Punkt in der Richtung der $z$-Achse als vierfachem Kurvenpunkt.

Um *die Ordnung dieser Projektionskurven und ihre Beschaffenheit im Unendlichen analytisch zu untersuchen*, stellen wir ihre Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten auf. Dazu verwerten wir die früher hergeleiteten Parametergleichungen (40a) der Horizontalprojektionen der Kurven $v = \text{konst.}$:

$$x = a\sqrt{1+c^2}\cos\varphi; \qquad y = b\sqrt{1+c^2}\sin\varphi, \tag{60}$$

wobei $\sin u$ und $\cos u$ durch die Werte (41) gegeben sind. Setzt man dieselben in der dritten der Parametergleichungen (38) ein, so folgt:

$$z = b^3 k \frac{(1-c)^2}{(1+c^2)^{3/2}}(\sin\varphi - \cos\varphi)^2[(1-c)(\sin\varphi - \cos\varphi) + 3c(1+c)(\sin\varphi + \cos\varphi)] \quad \text{oder}$$

$$z = b^3 k \frac{(1-c)^2}{(1+c^2)^{3/2}}[(3c^2 - 2c - 1)\sin^3\varphi - 3(1+c^2)\sin^2\varphi\cos\varphi - 3(c^2+2c-1)\sin\varphi\cos^2\varphi + (3c^2+4c-1)\cos^3\varphi].$$

Zur Vereinfachung führen wir die Substitutionen ein:

$$b^3 k \frac{(1-c)^2}{(1+c^2)^{3/2}} = C;$$

$$3c^2 - 2c + 1 = \alpha; \qquad -3(1+c^2) = \beta;$$

$$-3(c^2+2c-1) = \gamma; \qquad 3c^2+4c-1 = \delta.$$

Dann wird

$$z = C(\alpha\sin^3\varphi + \beta\sin^2\varphi\cos\varphi + \gamma\sin\varphi\cos^2\varphi + \delta\cos^3\varphi). \tag{60a}$$

Die Gleichung der Vertikalprojektionen der Parameterkurven $v = \text{konst.}$ in rechtwinkligen Koordinaten erhält man nun dadurch, daß man in (60a) die Sinusse durch die Kosinusse ausdrückt und den Wert von $\cos\varphi$ aus der ersten Gleichung (60) darin einsetzt. Es entsteht dann eine Beziehung zwischen $x$, $z$ und Konstanten, welche die gesuchte Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten darstellt.

Da aber Gleichung (60a) symmetrisch in $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ gebaut ist, so bekommt man, abgesehen von den konstanten Koeffizienten, eine in bezug auf die laufenden Koordinaten mit ihr vollständig übereinstimmende Gleichung, wenn der Wert für $\sin\varphi$ aus (60) in der entsprechend geänderten Gleichung (60a) eingeführt wird.

Die Resultate der folgenden Untersuchungen gelten daher für die Auf- und Seitenrisse der Parameterlinien $v = \text{konst.}$

Führt man die oben angedeutete Elimination des Winkels $\varphi$ aus, so findet man als *Gleichung der Vertikalprojektionen der Parameterlinien $v = konst.$ in kartesischen Koordinaten*:

$$Ax^6 + Bx^4 + Cx^3z + Dx^2 + Ez^2 + Fxz + G = 0 \qquad (61)$$

wo die Koeffizienten $A, B, C \ldots$ bestimmte Funktionen des Parameters $c$ sind.

*Die Projektionskurven $v = konst.$ in der $xz$-Ebene sind somit wirklich vom sechsten Grade* und liegen, wie früher gesehen, symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt.

Ihre *Asymptotenrichtungen* erhält man durch Nullsetzen des höchst potenzierten Gliedes der Gleichung (61):

$$Ax^6 = 0 .$$

Dies verlangt

$$x^6 = 0; \qquad x = 0, \qquad \text{sechsfach.}$$

Alle sechs Asymptotenrichtungen fallen demnach mit der $z$-Achse zusammen. Um den unendlich fernen Punkt dieser Achse zu untersuchen, projizieren wir ihn in den Nullpunkt vermittels der Transformationsformeln

$$z = \frac{1}{z'}; \qquad x = \frac{x'}{z'} .$$

Die transformierte Kurvengleichung lautet dann:

$$Ax'^6 + Bx'^4z'^2 + Dx'^2z'^4 + Gz'^6 + Cx'^3z'^2 + Fx'z'^4 + Ez'^4 = 0 .$$

Sie beginnt mit einem Gliede vierten Grades. Der Nullpunkt ist somit ein vierfacher Kurvenpunkt. Seine vier Tangenten bestimmen sich aus

$Ez'^4 = 0$, also $z' = 0$, oder rückwärts transformiert: $z = \infty$, vierfach.

Weil $z'$ auch ein Faktor der Glieder fünften Grades obiger Gleichung:

$$(Cx'^3 + Fx'z'^2)z'^2$$

ist, so schneidet diese Tangente die Kurve im vierfachen Punkte in sechs zusammenfallenden Punkten.

Da genau dieselben Ergebnisse, wie oben bemerkt, auch für die Seitenrisse der Parameterkurven $v = konst.$ gelten, so folgt das Resultat: *Die Projektionen der Parameterlinien $v = konst.$ auf die*

*xz- und yz-Ebene sind Kurven sechster Ordnung. Der unendlich ferne Punkt der z-Achse zählt als vierfacher, isolierter Kurvenpunkt.* Seine vier Tangenten fallen mit der unendlich fernen Geraden der jeweiligen Projektionsebene zusammen: diese schneidet den vierfachen Punkt in sechs zusammenfallenden Punkten.

Weil die Koordinaten der Auf- und Seitenrisse der Parameterlinien $v$ = konst. durch rationale Funktionen von trigonometrischen Funktionen des Parameterwinkels $u$ dargestellt werden können, so sind diese *rationale oder unikursale Kurven sechster Ordnung* und weisen die Maximalzahl der Doppelpunkte auf, nämlich zehn. Da die vierfach gelegte Tangente $g_\infty$ des unendlich fernen isolierten vierfachen Punktes der $z$-Achse die Kurve in ihm in sechs zusammen fallenden Punkten schneidet, so ist dieser Punkt, wie früher gezeigt wurde, acht Doppelpunkten gleichwertig. Bei den Seitenrissen der Parameterlinien $v$ = *konst.*, die außerdem noch je zwei weitere reelle Doppelpunkte besitzen, sind daher sämtliche Doppelpunkte reell, während dies nicht bei allen Vertikalprojektionen der Fall ist, wie z. B. bei den Aufrissen der Parameterlinien $v$ = konst. $= \pm \sqrt{3}$, die neben dem vierfachen Punkte keinen reellen singulären Punkt aufweisen, und somit zwei imaginäre Doppelpunkte besitzen müssen.

Überträgt man die oben gefundenen Eigenschaften der Projektionskurven hinsichtlich ihrer Ordnung und der Beschaffenheit im Unendlichen auf den Raum, so folgt: *Die Parameterlinien $v$ = konst. selbst auf der abwickelbaren Tangentenfläche achter Ordnung sind Raumkurven sechster Ordnung und besitzen im unendlich fernen Punkt der z-Achse einen vierfachen Punkt.*

Da ihre Projektionen auf die $xy$-Ebene Ellipsen und diejenigen auf die beiden anderen Koordinatenebenen Kurven sechsten Grades sind, so ist jede Parameterlinie $v$ = konst. aufzufassen als *partieller Durchschnitt je zweier senkrecht aufeinander stehender, zu demselben Parameter c gehörender Zylinder*, von denen der eine ein elliptischer, der andere vom sechsten Grade ist.

*Der vollständige Durchschnitt zweier solcher Zylinder ist eine Raumkurve zwölfter Ordnung*, bestehend aus der entsprechenden Parameterlinie $v$ = konst. und einer weiteren gewundenen Kurve sechster Ordnung.

Jeder der erzeugenden Zylinder sechsten Grades schneidet die unendlich ferne Ebene des Raumes in einer vierfach gelegten Geraden, die durch den unendlich fernen Punkt der $z$-Achse geht. Da, wie früher festgestellt, dieser Punkt auch ein Doppelpunkt des

erzeugenden elliptischen Zylinders ist, so zählt er als *achtfacher Punkt des vollständigen Durchschnittes* der beiden erzeugenden Zylinder, also als *vierfacher Punkt eines jeden der beiden Teilschnitte sechster Ordnung.*

## § 9. Die Schnitte der Tangentenfläche mit den Koordinatenebenen.

### 1. Der Schnitt mit der $xy$-Ebene.

(Fig. IV.)

Setzt man in der Gleichung (36) der Tangentenfläche in rechtwinkligen Koordinaten $z = 0$, so erhält man als *Gleichung der Spurkurve derselben in der $xy$-Ebene*:

$$9b^2x^6y^2 + 9a^2x^4y^4 - 4b^4x^6 - 30a^2b^2x^4y^2 - 18a^4x^2y^4 + 12a^2b^4x^4 + 33a^4b^2x^2y^2 + 9a^6y^4 - 12a^4b^4x^2 - 12a^6b^2y^2 + 4a^6b^4 = 0,$$

oder zusammengefaßt

$$(9b^2x^2y^2 + 9a^2y^4 - 4b^4x^2 - 12a^2b^2y^2 + 4a^2b^4)(a^2 - x^2)^2 = 0. \quad (62)$$

Sie zerfällt demnach

1. in den Ausdruck $(a^2 - x^2)^2 = 0$, also
$x = \pm a$ je zweifach,

welcher *zwei doppelt gelegte, unter sich und zur $y$-Achse parallele Geraden* im Abstande $\pm a$ von derselben darstellt. Diese sind die Tangenten in den Scheiteln der großen Achse der Grundellipse, die identisch sind mit den Tangenten in den Scheiteln $S_1(a, 0, 0)$ und $S_2(-a, 0, 0)$ der Raumkurve selbst, längs denen, wie früher festgestellt, die $xy$-Ebene als Doppelschmiegungsebene der Raumkurve, bzw. Doppeltangentialebene der Tangentenfläche, letztere berührt.

Aus Gleichung (62) folgt

2. $9y^2(b^2x^2 + a^2y^2) - 4b^2(b^2x^2 + 3a^2y^2 - a^2b^2) = 0.$ (63)

Außer in den beiden eben genannten doppelt zu zählenden Geraden schneidet die Tangentenfläche achter Ordnung die $xy$-Ebene noch in einer *symmetrisch in bezug auf beide Achsen*, also auch in bezug auf den Nullpunkt gebauten *Kurve vierter Ordnung*, die wir eingehender untersuchen wollen.

*Die Asymptotenrichtungen* dieser $C_4$, bestimmt aus den gleich Null gesetzten Gliedern höchsten Grades ihrer Gleichung (63), zerfallen

1. in die zwei konjugiert imaginären Geraden

$$y = \pm \frac{b}{a} i x ,$$

die sich im reellen Nullpunkt schneiden,

2. in die doppelt gelegte $x$-Achse $y = 0$.

Der unendlich ferne Punkt in der Richtung der $x$-Achse, in welchem somit die Kurve die unendlich ferne Gerade in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet, ist, wie die Untersuchung zeigt, ein *doppelter Inflexionsknoten* der Spurkurve in der $xy$-Ebene mit den beiden zueinander und zur $x$-Achse parallelen *Wendeasymptoten*:

$$y = \pm \frac{2}{3} b .$$

Dieser doppelte Inflexionsknoten ist nach (30) der in der $xy$-Ebene liegende gemeinsame Spurpunkt der beiden Tangenten in den Polen der Raumkurve, welche Wendegeraden der Tangentenfläche sind, und die Wendeasymptoten sind nach (29) die Spuren der stationären Ebenen der beiden Pole, also der durch sie gehenden Wendetangentialebenen der Tangentenfläche.

Außer im unendlich fernen Punkte schneidet die $x$-Achse die Kurve vierter Ordnung noch in den beiden gleich weit vom Nullpunkt entfernten Scheiteln $S_1(a, 0)$ und $S_2(-a, 0)$.

Die Schnittpunkte mit der Ordinatenachse dagegen fallen in *zwei konjugierten Punkten* von den Ordinaten

$$y = \pm b \sqrt{\frac{2}{3}}$$

zusammen.

Zur weiteren Untersuchung dieser Kurve bedienen wir uns einer Parameterdarstellung, die aus den Parametergleichungen (37) der Tangentenfläche hervorgeht, wenn in ihnen die Koordinate $z$ verschwindet:

$$z = b^3 k \sin^2 u \,(\sin u + 3v \cos u) = 0 . \quad \text{Daraus folgt:}$$

$$v = -\frac{\sin u}{3 \cos u} .$$

Setzt man diesen Wert für $v$, welcher die Bedingung des Schnittes sämtlicher geradliniger Erzeugenden der Tangentenfläche mit der $xy$-Ebene darstellt, in den Parametergleichungen (37) für $x$ und $y$ ein, so entsteht als *Parameterdarstellung der Spurkurve der Tangentenfläche in der xy-Ebene*:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} a \cos u + \frac{a}{3 \cos u} \\ y &= \frac{2}{3} b \sin u \,. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

wo der Parameter $u$ sämtliche Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für die besonderen Parameterwinkel $u = 0°$ und $u = 180°$ die Punkte $S_1(a, 0)$ und $S_2(-a, 0)$, d. h. die auf der $x$-Achse liegenden Scheitel der Raumkurve.

Den Parameterwerten $u = 90°$, bzw. $u = 270°$ entsprechen die Koordinaten

$$x = \pm\infty \,; \quad y = \pm\frac{2}{3} b \,,$$

also der unendlich ferne Doppelpunkt der Kurve auf der $x$-Achse. Nach der zweiten Parametergleichung ist der obige Wert für $y$ der absolut größte. *Die Ordinate erreicht also im unendlich fernen doppelten Inflexionsknoten ihren Extremwert.*

*Die absoluten Maxima der Abszisse*, bestimmt durch Nullsetzen des ersten nach $u$ genommenen Differentialquotienten von $x$, liegen

1. in den beiden im Abstande $a$ vom Nullpunkt entfernten Scheiteln $S_1$ und $S_2$,

2. in den vier zu den Parameterwinkeln $u = 45°, 135°, 225°, 315°$ gehörigen Punkten mit den Koordinaten

$$x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} a \,, \quad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{3} b \,.$$

Die der $y$-Achse parallel verlaufenden Geraden

$$x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} a$$

sind *Doppeltangenten der Schnittkurve* in je zwei Punkten mit derselben Minimalabszisse. Sie sind nach den Gleichungen (25a)

die in der $xy$-Ebene liegenden gemeinsamen Spuren je der beiden zu den Parameterwinkeln

$$45° \text{ und } 315°, \text{ bzw. } 135° \text{ und } 225°$$

gehörenden Schmiegungsebenen der Raumkurve, also Tangentialebenen der Tangentenfläche.

Da diese vier Ebenen senkrecht auf der $xy$-Ebene stehen, verlaufen ihre Schnittgeraden mit der $xy$- bzw. $yz$-Ebene und mit Ebenen parallel zu denselben, parallel zu den Ordinaten- bzw. Abszissenachsen der jeweiligen Schnittkurven der Tangentenfläche in diesen Ebenen, und berühren diese Schnitte als reguläre Tangenten in Punkten, welche die Durchstoßpunkte der Tangenten der zu obigen Schmiegungsebenen gehörenden Raumkurvenpunkte sind. Daraus folgt, daß jede ebene Schnittkurve der Tangentenfläche in der $xy$- bzw. $yz$-Ebene und in Ebenen parallel zu denselben im allgemeinen in den zu den Parameterwinkeln 45°, 135°, 225° und 315° gehörenden Punkten *Extremwerte ihrer Abszissen bzw. Ordinaten besitzt.*

Zur Bestimmung der Parameter der Inflexionsstellen gilt die Gleichung:

$$2\sin^2 u\cos^2 u - \sin^2 u + 2\cos^4 u - 2\sin^2 u - \cos^2 u = 0;$$

daraus folgt: $$\cos u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Die vier Wendepunkte $W_1$, $W_2$, $W_3$, $W_4$ der Schnittkurve in der $xy$-Ebene entsprechen also den Parameterwinkeln

$$u = 30°, \quad 150°, \quad 210° \quad \text{und} \quad 330°.$$

Ihre Koordinaten erhalten nach den Gleichungen (64) bzw. die Werte:

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{9}a, \quad y = \pm\frac{b}{3}.$$

Diese vier Inflexionsstellen entsprechen den vier Oskulationspunkten $O_1, O_2, O_3, O_4$ der Raumkurve und sind die in der $xy$-Ebene liegenden Spurpunkte der Tangenten dieser Punkte (31), welche Wendegeraden der abwickelbaren Tangentenfläche darstellen.

Die Schnittkurve der Tangentenfläche mit der $xy$-Ebene besitzt somit wirklich in Übereinstimmung mit den sechs Wendetangentialebenen der Tangentenfläche *sechs Wendepunkte*, nämlich die Punkte

$W_1$, $W_2$, $W_3$, $W_4$ und den unendlich fernen doppelten Inflexionsknoten in der Richtung der $x$-Achse, welche zu den Parameterwinkeln $u = 30°$, $150°$, $210°$, $330°$ und $90°$, $270°$, gehören.

Zur Untersuchung der Tangenten in besonderen Kurvenpunkten benützen wir die *allgemeine Gleichung der Tangente* im Punkte $P(x_0 y_0)$ der $C_4$:

$$\left.\begin{aligned} &b^2 x_0 (9y_0^2 - 4b^2) \cdot x + 3y_0 (3b^2 x_0^2 + 6a^2 y_0^2 - 4a^2 b^2) \cdot y + \\ &2[2b^4 x_0^2 - 3y_0^2 (3b^2 x_0^2 + 3a^2 y_0^2 + 2a^2 b^2)] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Für die *Tangenten in den beiden Scheiteln* $S_1(a, 0)$ und $S_2(-a, 0)$ ergeben sich hieraus die Gleichungen

$$x = \pm a .$$

Die Tangenten dieser Punkte fallen demnach zusammen mit den beiden doppelt gelegten Geraden

$$x = \pm a , \quad z = 0 ,$$

den Tangenten in den Scheiteln der Raumkurve selbst, längs welchen die $xy$-Ebene die Tangentenfläche berührt.

Setzt man in (65) für $x_0$ und $y_0$ die Koordinaten des Wendepunktes $W_1(u = 30°)$:

$$x = \frac{5\sqrt{3}}{9} a , \qquad y = \frac{b}{3} , \qquad \text{ein,}$$

so folgt als *Gleichung der Inflexionstangente in diesem Punkte*:

$$9\sqrt{3} b x + 3ay - 16ab = 0 .$$

Ähnliche Ausdrücke erhält man für die Tangenten der drei Wendepunkte $W_2$, $W_3$, $W_4$. Diese Inflexionstangenten sind nach (28) die in der $xy$-Ebene liegenden Spuren der durch die Oskulationspunkte $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ gehenden Wendetangentialebenen der Tangentenfläche, und ihre Gleichungen entstehen ohne weiteres aus den Gleichungen (28) durch Nullsetzen der Koordinate $z$.

Die Gleichungen der Tangenten in den zwei zueinander zentrisch symmetrisch liegenden Kurvenpunkten $P(u = 60°)$ und $P(u = 240°)$ bzw. mit den Koordinaten

$$x = \pm a , \qquad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} b$$

werden beide nach (65) dargestellt durch denselben Ausdruck

$$\sqrt{3}bx - 3ay = 0\,, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a\sqrt{3}}x \tag{66}$$

d. h. die durch diese Gleichung definierte, durch den Koordinatenursprung gehende Gerade ist *Doppeltangente* der vorliegenden $C_4$ und berührt diese in den beiden Punkten $P(u=60°)$ und $P(u=240°)$.

In gleicher Weise findet man, daß auch die zur eben erwähnten Geraden achsensymmetrisch liegende Gerade

$$+\sqrt{3}b \cdot x + 3ay = 0\,, \quad \text{oder} \quad y = -\frac{b}{a\sqrt{3}}x, \tag{66a}$$

*Doppeltangente* der Schnittkurve ist und diese in den beiden Punkten $P(u = 120°)$ und $P(u = 300°)$ berührt.

Diese beiden Doppeltangenten sind die in der $xy$-Ebene befindlichen Spuren der durch die Gleichungen (26) und (26a) dargestellten Doppelschmiegungsebenen der Raumkurve oder Doppeltangentialebenen der Tangentenfläche.

Da die vorliegende Schnittkurve vierten Grades in der $xy$-Ebene die Maximalzahl der Doppelpunkte: drei aufweist, nämlich den unendlich fernen Inflexionsknoten in der Richtung der $x$-Achse und die beiden konjugierten Doppelpunkte auf der $y$-Achse, so ist sie *rational oder unikursal* und kann mit stetig wachsendem Parameter $u$ von einem Punkte als erzeugendem Kurvenelement in einem einzigen, ununterbrochenen Zuge in der Richtung des Pfeils durchlaufen werden.

Die Kurve besteht aus zwei kongruenten, symmetrisch zur $y$-Achse gebauten unendlichen Ästen. Sie liegt einerseits vollständig innerhalb der beiden zur $x$-Achse parallelen Geraden

$$y = \pm\frac{2b}{3}\,,$$

ihren Wendeasymptoten, während sie andererseits auch ganz außerhalb der Grundellipse, der Schnittkurve des erzeugenden elliptischen Zylinders mit der $xy$-Ebene, verläuft, da ja kein Teil der reellen Tangentenfläche innerhalb dieses Zylinders liegen kann.

Nur die beiden isolierten Doppelpunkte auf der $y$-Achse mit den Ordinaten

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}b$$

liegen innerhalb der Grundellipse. Diese Punkte können daher nicht dem reellen Teil der Tangentenfläche angehören, sondern sind, wie später gezeigt wird, die in der $xy$-Ebene befindlichen *Spurpunkte einer isoliert außerhalb der Tangentenfläche verlaufenden Doppelkurve.*

Die beiden doppelt gelegten Geraden

$$x = \pm a$$

schneiden die Spurkurve vierter Ordnung der Tangentenfläche in der $xy$-Ebene je in zwei symmetrisch in bezug auf die Abszissenachse

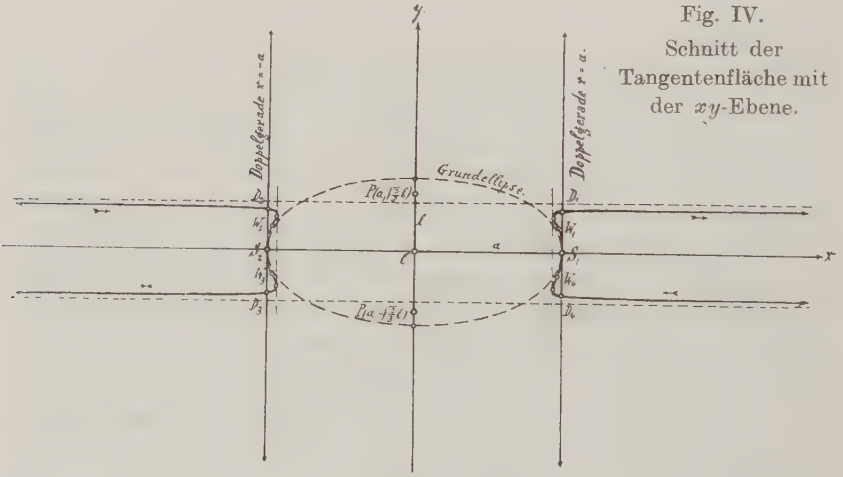



Fig. IV.
Schnitt der Tangentenfläche mit der $xy$-Ebene.

zueinander liegenden Punkten von den Parameterwinkeln 60° und 300°, bzw. 120° und 240°, und den Koordinaten

$$x = \pm a, \qquad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} b.$$

Geometrisch zählen diese vier Schnittpunkte $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$ für je zwei zusammenfallende Doppelpunkte der Gesamtschnittkurve achter Ordnung der Tangentenfläche in der $xy$-Ebene, bestehend aus den beiden doppelt gelegten Geraden $x = \pm a$ und der Spurkurve vierten Grades. Weil nun nach den Gleichungen (66) und (66a) die beiden sich im Nullpunkt schneidenden Geraden

$$y = \pm \frac{b}{a\sqrt{3}} x$$

als Doppeltangenten die $C_4$ in je zwei der eben genannten Punkten $D$ berühren, so haben diese Geraden in ihnen je vier Punkte mit dem Gesamtschnitt achter Ordnung gemeinsam, da sie zugleich noch in denselben Stellen je die Doppelgeraden durchschneiden. Dies rührt daher, daß obige beiden Doppeltangenten nach (14) identisch sind mit den Spurgeraden zweier Ebenen, in welchen *Doppelkurven* der Tangentenfläche liegen, *welch* letztere, wie später gezeigt wird, *die xy-Ebene gerade in den vier Punkten D berühren.*

Wie diese vier ausgezeichneten Punkte $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$, so gehören auch *die beiden Scheitel* $S_1(a, 0)$ *und* $S_2(-a, 0)$ sowohl den beiden doppelt gelegten Geraden als auch der $C_4$ an. Weil sie aber auf keiner der Doppelkurven der Tangentenfläche, die wir später genauer behandeln werden, liegen, so wollen wir hier anschließend untersuchen, welche besondere Bedeutung ihnen als Punkte der Tangenten*fläche* zukommt.

Zu diesem Zwecke verschieben wir vermittels der Substitutionen

$$x = a + x' \; ; \quad y = y' \; ; \quad z = z'$$

die $yz$ Ebene parallel nach dem Scheitel $S_1(a, 0, 0)$, so daß dieser Ursprung des Koordinatensystems wird. In der auf ihn bezogenen transformierten Gleichung der Tangentenfläche (36) fehlen die konstanten und linearen Glieder, und diejenigen zweiten und dritten Grades werden:

$$a^3b^6\,(6\,a^2x'z'^2 + 12\,a^2b^2kx'y'z' - 32\,b^6k^2x'^3 + a^3z'^2)\,.$$

Der Scheitel $S_1$ ist also ein *Doppelpunkt der Fläche.* Sein Knotenkegel, ausgedrückt durch das einzige mit Null verglichene Glied zweiten Grades:

$$a^6b^6z'^2 = 0\,, \qquad z'^2 = 0, \quad \text{also}$$
$$z' = 0\,, \quad \text{doppelt,} \quad \text{oder rückwärts transformiert}$$
$$z = 0\,,$$

zerfällt in die doppelt gelegte $x'y' - $ $xy$-Ebene. Der Scheitel $S_1(a, 0, 0)$ ist somit ein *uniplanarer Doppelpunkt* der Tangentenfläche. *Die xy-Ebene als doppelt gelegte Knotenebene* ist Tangentialebene in ihm.

Jede Ebene durch diesen uniplanaren Doppelpunkt schneidet die Tangentenfläche in einer ebenen Kurve, die diesen Punkt zur

Spitze hat; ihre Rückkehrtangente ist die Spurgerade der obigen Knotenebene $z = 0$ in der jeweiligen Schnittebene.

*Die drei Haupt- oder Inflexionstangenten*, welche die Fläche im Scheitel $S_1$ vierpunktig berühren, ergeben sich als Schnittgeraden der Knotenebene $z' = 0$ mit dem Kegel dritten Grades, welch letzterer dargestellt ist durch die Gleichung

$$3a^2x'z'^2 + 6a^2b^2kx'y'z' - 16b^6k^2x'^3 = 0.$$

Setzt man hierin $z' = 0$, so folgt

$$-32a^3b^{12}k^2x'^3 = 0, \qquad \text{somit}$$

$x' = 0$, dreifach, oder rückwärts transformiert:

$x = a$, dreifach,

d. h. die der $y$-Achse parallele *Gerade* $x = a$, $z = 0$ in der $xy$-Ebene, die Tangente der Raumkurve im Scheitel $S_1$, längs welcher die Tangentenfläche diese Koordinatenebene berührt, ist zugleich *dreifach zu zählende Inflexionstangente im uniplanaren Doppelpunkte* $S_1$.

Jede Ebene durch diese Gerade schneidet die Tangentenfläche in einer Kurve achter Ordnung, welche in eben diese Gerade und noch eine $C_7$ zerfällt, die sich beide im Scheitel $S_1$ berühren. Dieser ist also ein Doppelpunkt des jeweiligen Gesamtschnittes achten Grades, und die Inflexionstangente

$$x = a, \qquad z = 0,$$

welche zugleich Wendetangente der $C_7$ im Scheitel ist, berührt somit in ihm die $C_8$ in vier zusammenfallenden Punkten, wie verlangt. *Die Knotenebene* endlich, die $xy$-Ebene selbst, schneidet die Tangentenfläche in einer ebenen Kurve, die im uniplanaren Doppelpunkte $S_1$ einen *dreifachen Punkt* besitzt, dessen drei Tangenten, die oben aufgestellten Haupt- oder Inflexionstangenten, identisch sind mit der Geraden.

$$x = a, \qquad z = 0.$$

Auf gleiche Weise ergibt sich, daß *auch der Scheitel* $S_2$ $(-a, 0, 0)$ *ein uniplanarer Doppelpunkt der Tangentenfläche ist*, dessen drei Haupttangenten mit der geradlinigen Erzeugenden

$$x = -a, \qquad z = 0$$

der Tangentenfläche, also der Tangente des Scheitels $S_2$ der Raumkurve, zusammenfallen.

## 2. Der Schnitt mit der $xz$-Ebene.

(Fig. V.)

Ausgedrückt in rechtwinkligen Koordinaten lautet nach (36) die *Gleichung der Schnittkurve der Tangentenfläche in der $xz$-Ebene*:

$$x^6 z^2 = 4b^6 k^2 (x^2 - a^2)^3 . \qquad (67)$$

Die Kurve ist vom achten Grade und liegt, wie der vorige Schnitt, *symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen und dem Ursprung.*

Der unendlich ferne Punkt der $z$-Achse ist ein *isolierter, sechsfacher Punkt*, in welchem die Kurve von der *$z$-Achse als reeller, isolierter sechsfach zu zählender Asymptote* in acht zusammenfallenden Punkten geschnitten wird.

Bei der Untersuchung der Parameterlinien $v$ = konst. gelangten wir zu dem Ergebnis, daß die vorliegende Spurkurve identisch ist mit dem geometrischen Ort derjenigen Punkte, in welchen die Abszissen der Parameterlinien ihre Extremwerte erreichen. Für diese Ortskurve erhielten wir die *Parameterdarstellung* (52):

$$x = \frac{a}{\cos u} ; \qquad z = -2b^3 k \sin^3 u . \qquad (68)$$

Die reellen Kurvenpunkte entsprechen also den Koordinatenwerten:

$$x \leq a , \qquad z \leq 2b^3 k .$$

Den Parameterwinkeln $u = 0°$ bzw. $u = 180°$ genügen die Scheitel $S_1(a, 0)$ und $S_2(-a, 0)$. Diese Punkte sind *Spitzen* mit der *$x$-Achse als gemeinsamer Spitzentangente*; ihren Abszissen kommen die absoluten Maximalwerte zu.

Zu den Parametern $u = 90°$ und $u = 270°$ gehört der unendlich ferne Punkt der $x$-Achse, der ein *doppelter Inflexionsknoten* ist mit den zur $x$-Achse parallelen Geraden $z = +2b^3 k$ als *Wendeasymptoten*; in ihm erreicht die Ordinate $z$ ihren absolut größten Wert.

Außer in diesem unendlich fernen Inflexionsknoten weist die Kurve, wie zu erwarten ist, noch vier den Parameterwinkeln $u = 30°, 150°, 210°, 330°$ entsprechende *Wendepunkte* auf von den Koordinaten

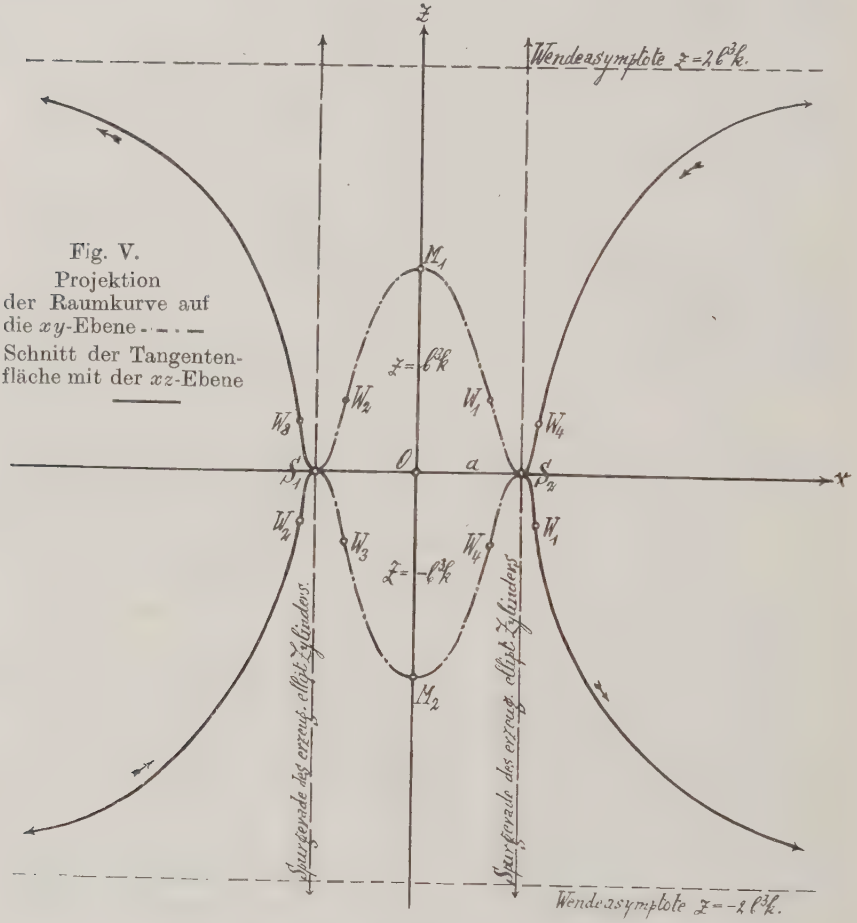
$$x = \pm \frac{2a}{\sqrt{3}} , \qquad y = \pm \frac{b^3 k}{4} .$$

Die beiden sich im Nullpunkt schneidenden und achsensymmetrisch zueinander liegenden Geraden

$$z = \pm \frac{3\sqrt{3} b^3 k}{8a} x$$

berühren als *Doppeltangenten* die $C_4$ in den zu den Parameterwinkeln $u = 60°$ und $240°$, bzw. $120°$ und $300°$ gehörigen Punkten.

Die vorliegende Schnittlinie ist eine *rationale oder unikursale Kurve achter Ordnung* und besitzt die Maximalzahl der Doppelpunkte : 21 . Weil die $z$-Achse als sechsfach gelegte Tangente des




unendlich fernen isolierten sechsfachen Punktes in der Richtung der $z$-Achse die Kurve in ihm nicht nur in sieben, sondern in acht Punkten schneidet, so müssen, wie früher begründet wurde, drei der diesem Punkte äquivalenten fünfzehn Doppelpunkte durch Selbstberührungsknoten ersetzt werden, die für je zwei gewöhnliche Doppelpunkte zählen. Der unendlich ferne sechsfache Punkt der $z$-Achse ist also achtzehn Doppelpunkten gleichwertig. Außer-

dem besitzt die Kurve noch zwei Spitzen in den Scheiteln $S_1$ und $S_2$ und einen unendlich fernen doppelten Inflexionsknoten in der Richtung der $x$-Achse, sodaß *sämtliche einundzwanzig Doppelpunkte reell sind.*

Abgesehen vom unendlich fernen isolierten sechsfachen Punkte der $z$-Achse weist der übrige Teil der Schnittkurve, in welchem die Tangenten der geschlossenen Raumkurve die $xz$-Koordinatenebene durchsetzen, zwei kongruente, in bezug auf die $z$-Achse symmetrisch zueinander gebaute hyperbolische Kurvenäste auf, welche begrenzt werden einerseits von den Geraden

$$z = \pm 2b^3k\,,$$

den Wendeasymptoten der Kurve, andererseits von den beiden andern

$$x = \pm a\,,$$

den Spuren des erzeugenden elliptischen Zylinders in der $xz$-Ebene, innerhalb denen kein reeller Teil der Tangentenfläche liegen kann.

### 3. Der Schnitt mit der $yz$-Ebene.
(Fig. VI.)

Bei der Untersuchung der Tangenteneigenschaften der Raumkurve gelangten wir zu dem Resultat, daß der geometrische Ort der Schnittpunkte je zweier Tangenten, deren Berührungspunkte in bezug auf die $yz$-Ebene symmetrisch zueinander liegen, eine *Doppelkurve* in dieser Koordinatenebene ist, längs welcher sich die Tangentenfläche selbst durchdringt.

Diese Eigenschaft folgt auch ohne weiteres aus der Gleichung (36) der Tangentenfläche, wenn wir in ihr die Koordinate $x$ verschwinden lassen. Kürzt man noch mit $a^6$, so erhält man:

$$y^6z^2 - 6b^4ky^5z + 9b^8k^2y^4 + 4b^6ky^3z - 12b^{10}k^2y^2 + 4b^{12}k^2 = 0\,.$$

Dieser Ausdruck bildet ein vollständiges Quadrat:

$$(y^3z - 3b^4ky^2 + 2b^6k)^2 = 0\,.$$

Die Schnittkurve der Tangentenfläche mit der $yz$-Ebene ist also wirklich *eine doppelt gelegte und in bezug auf den Nullpunkt symmetrisch gebaute Kurve vierten Grades* von der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} y^3z - 3b^4ky^2 + 2b^6k &= 0 \\ \text{oder} \qquad z &= \frac{b^4k}{y}\left(3 - \frac{2b^2}{y^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

*Die y-Achse als einfache Asymptote* schneidet die Kurve noch in zwei im Endlichen liegenden Punkten von den Abszissen

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\, b\,.$$

Diese Schnittpunkte sind identisch mit den bei der Spurkurve der Tangentenfläche in der $xy$-Ebene gefundenen beiden *konjugierten Punkten* $P\left(x = 0\,,\ x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\, b\right)$ der $y$-Achse.

Der unendlich ferne Punkt in der Richtung der $z$-Achse ist ein *Spitzpunkt*, dessen drei Tangenten in der *z-Achse als dreifacher Asymptote* zusammenfallen.

In den beiden zentrisch-symmetrisch zueinander liegenden Punkten $M_1(b\sqrt{2}\,,\ b^3k\sqrt{2})$ und $M_2(-b\sqrt{2}\,,\ -b^3k\sqrt{2})$ erreicht die Kurve ein *Maximum, bzw. Minimum in bezug auf die Abszissenachse.*

*Die Wendepunkte* der vorliegenden Schnittkurve findet man aus der Beziehung

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{6b^4k}{y^3}\left(1 - \frac{4b^2}{y^2}\right) = 0\,,$$

oder, wenn der Faktor vor der Klammer durch Division weggeschafft wird:

$$y^2 = 4b^2\,,$$
$$y = \pm 2b\,.$$

Diese Werte führen auf die zwei symmetrisch zum Nullpunkt liegenden Wendepunkte

$$W_1\left(2b\,,\ \frac{5}{4}\,b^3k\right) \quad \text{und} \quad W_2\left(-2b\,,\ -\frac{5}{4}\,b^3k\right).$$

Weil die doppelt gelegte Spurkurve vierten Grades der Tangentenfläche in der $yz$-Ebene im unendlich fernen Punkte der $z$-Achse einen dreifachen Punkt, einen Spitzpunkt, aufweist, dessen drei Tangenten mit der $z$-Achse zusammenfallen, welcher also drei Doppelpunkten (zwei Spitzen und einem Knotenpunkte) gleichwertig ist, ist sie *rational oder unikursal*, und kann in der Richtung des Pfeiles (Fig. VI) in einem einzigen ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden.

Ihre Koordinaten lassen sich also auch durch rationale Funktionen eines Parameters ausdrücken. Wir stellten ihre

Parametergleichungen auf bei der Untersuchung der Parameterlinien $v = \text{konst.}$, als wir zu dem Satze geführt wurden, daß die vorliegende Schnittkurve der Tangentenfläche identisch ist mit dem geometrischen Orte der Extremwerte der Ordinaten dieser Parameterkurven.

Die *Parameterdarstellung* lautet nach (56):

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{b}{\sin u} \\ z &= b^3 k \sin u\,(3 - 2\sin^2 u). \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

Da diese Gleichungen den Parameterwinkel $u$ enthalten, so ermöglichen sie uns die Bedeutung der einzelnen Teile der vorliegenden Doppelkurve im Zusammenhang mit der Tangentenfläche festzustellen.

Vorerst ersieht man aus ihnen sofort, daß die durch sie dargestellte Schnittkurve *doppelt gelegte Spurkurve* der Tangentenfläche ist. Denn setzt man für $u$ den supplementären Winkel $(180° - u)$, so erhalten die Koordinaten gleiche Werte, d. h. zwei Parameterwinkel, die sich zu 180° ergänzen, liefern denselben Kurvenpunkt. Jeder Punkt des vorliegenden Schnittes ist somit ein Doppelpunkt. Dies steht in Einklang mit der früher gefundenen Eigenschaft, daß sich die Tangenten zweier Raumkurvenpunkte, deren Parameterwinkel supplementär sind, in einem Punkte der $yz$-Ebene schneiden. Die Tangente eines Punktes $P(u)$ der Doppelkurve ist die gemeinschaftliche Spur der beiden Schmiegungsebenen der Raumkurve, also Tangentialebenen der Tangentenfläche, welche zu den zwei entsprechenden, sich im Punkte $P(u)$ der $yz$-Ebene schneidenden Tangenten der Raumkurve oder geradlinigen Erzeugenden der Tangentenfläche gehören.

Die beiden verschiedenen, denselben Kurvenpunkt liefernden Winkel $u$ und $(180° - u)$ können auch in der allgemeinen Form geschrieben werden:

$$(90° - u) \text{ und } (90° + u) \quad \text{oder} \quad (270° - u) \text{ und } (270° + u). \qquad (\alpha)$$

Daraus folgt, daß man für die Reihen der Parameterwerte von 0°—90° und 180°—90°, ebenso für diejenige der Parameter von 180°—270° und 360°—270° je dieselbe Punktfolge erhält. Mit wachsendem Parameter wird somit die Schnittkurve doppelt durchlaufen.

Aus den Parametergleichungen ergibt sich, daß die *zwei Extremwerte* in der Richtung der Ordinatenachse: $M_1(b\sqrt{2},\ b^3k\sqrt{2})$ und $M_2(-b\sqrt{2},\ -b^3k\sqrt{2})$ zu den beiden Parameterwinkeln 45° und 135°, bzw. 225° und 315°, gehören. Ihre Tangenten

$$z = \pm b^3k\sqrt{2}$$

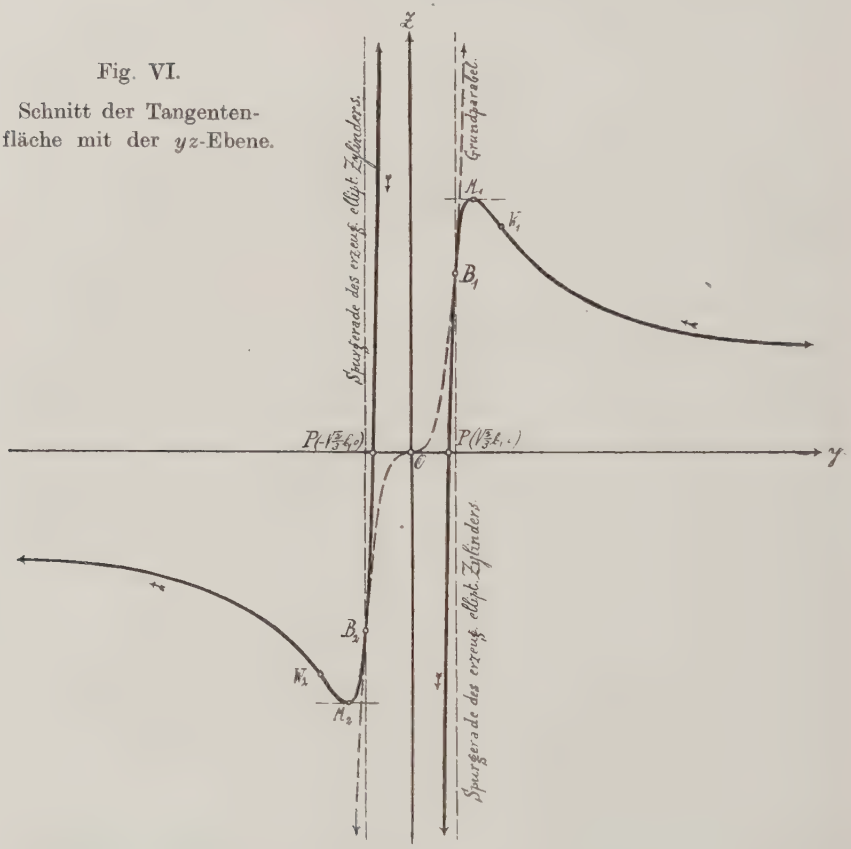



Fig. VI.

Schnitt der Tangentenfläche mit der $yz$-Ebene.

sind nach den Gleichungen (25b) die gemeinsamen Spurgeraden je der beiden entsprechenden Tangentialebenen der Tangentenfläche in der $yz$-Ebene, welch letztere senkrecht auf der $xz$-Ebene stehen.

Ebenso liefern die zwei Parameterwinkel 60° und 120°, bzw. 240° und 300° die beiden symmetrisch zueinander liegenden Punkte

$$P\left(\pm\frac{2b}{\sqrt{3}},\quad \pm\frac{3\sqrt{3}\,b^3k}{4}\right),$$

in welchen die durch den Nullpunkt gehende Gerade

$$9b^2ky - 8z = 0,$$

die gemeinsame Spur der beiden Doppeltangentialebenen (26) und (26a) der Tangentenfläche, als *einzige Doppeltangente*, die vorliegende Kurve berührt.

Auch den beiden in bezug auf den Nullpunkt symmetrisch zueinander liegenden *Wendepunkten* $W_1$ *und* $W_2$ mit den Koordinaten

$$y = \mp 2b; \qquad z = + \frac{5}{4} b^3k$$

entsprechen je zwei verschiedene Parameterwinkel: 30° und 150°, bzw. 210° und 330°, d. h. diese Inflexionsstellen werden durch den Schnitt je zweier Wendegeraden (31) der Tangentenfläche gebildet, die zu den obigen Parameterwerten gehören, und ihre beiden Wendetangenten

$$3ab^2ky + 8az \mp 16ab^3k = 0,$$

die zueinander parallel verlaufen, stellen nach den Gleichungen (28) die gemeinsamen Spuren je der beiden entsprechenden Wendetangentialebenen der Tangentenfläche in der Schnittebene dar.

Die Durchstoßpunkte der beiden übrigen, zu den Parametern $u = 90°$ und $u = 270°$ gehörenden Wendegeraden (30) der Tangentenfläche:

$$y = \pm b; \qquad z = \pm b^3k,$$

nämlich die beiden zentrisch-symmetrisch zueinander liegenden *Pole* $B_1(b, b^3k)$ und $B_2(-b, -b^3k)$ der Raumkurve selbst, sind wider Erwarten keine Wendepunkte der vorliegenden Doppelkurve. Ihre zueinander parallel verlaufenden Tangenten

$$3b^2ky - z + 2b^3k = 0,$$

nach (29) die Spuren der entsprechenden, senkrecht auf der Schnittebene stehenden Wendetangentialebenen der Tangentenfläche, sind regulär, wie durch Einsetzen des Wertes von $z$ aus obiger Gleichung in die Kurvengleichung (69) gezeigt werden kann.

Um dieses Verhalten erklären zu können, müssen wir eingehender feststellen, welche Bedeutung den beiden *Polen* als Punkte der vorliegenden Knotenlinie zukommt. Untersucht man die Kurve

vermittels der Parametergleichungen (70), so ergibt sich, daß den Parameterwinkeln der Pole:

$$u = 90° \quad \text{und} \quad u = 270°,$$

sowohl Extremwerte beider Koordinaten wie auch Wendepunkte entsprechen sollten, trotzdem dies nicht der Fall ist. Dieser Umstand liegt darin begründet, daß nach den oben aufgestellten Beziehungen ($\alpha$) die zwei verschiedenen, denselben Kurvenpunkt erzeugenden Parameterwinkel für $u = 0°$, in $90°$ und $270°$ zusammenfallen.

Ferner folgt aus der ersten Gleichung (70), daß für *reelle* Werte von $u$ stets

$$|y| \geqq b,$$

d. h. *in den beiden Polen $B_1$ und $B_2$ erreichen die Abszissen $y$ für reelle Parameterwinkel ihre Extremwerte.* Die beiden Punkte liegen auf den zwei zur $z$-Achse parallelen Geraden

$$y = \pm b,$$

welches die Schnittgeraden des erzeugenden elliptischen Zylinders mit der $yz$-Ebene sind. Da nun innerhalb dieses Zylinders kein Teil der reellen Tangentenfläche liegen kann, so muß derjenige Ast der vorliegenden Kurve, welcher innerhalb des eben genannten Geradenpaares liegt, doppelt gelegte Spurkurve des imaginären Teiles der Tangentenfläche sein, erzeugt durch die aufeinanderfolgenden reellen Schnittpunkte je zweier konjugiert imaginärer Tangenten der Raumkurve oder geradliniger Erzeugenden der Tangentenfläche, deren Parameterwinkel imaginär sind. Nur derjenige Ast der Kurve, welcher außerhalb der beiden Geraden liegt, ist doppelte Spurkurve der reellen Tangentenfläche, längs welcher sie sich selbst durchdringt.

Die beiden Pole bilden den Übergang von dem der reellen Tangentenfläche angehörenden Zweig der Doppelkurve zu demjenigen, der isoliert außerhalb der Tangentenfläche verläuft.

Diese durch rein geometrische Anschauung gewonnenen Resultate wollen wir auch auf analytischem Wege herleiten. Zu dem Zwecke untersuchen wir einen beliebigen Punkt der vorliegenden Doppelkurve als Koordinatenursprung der entsprechend transformierten Tangentenfläche. Wir benützen dazu eine *neue Parameterdarstellung* der Knotenlinie, die man aus der Doppelgleichung (15)

der Raumkurventangente, ausgedrückt im Parameter $v$, erhält, wenn man in ihr $x = 0$ setzt. Sie wird dann zu:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{b^2}{v} \\ z &= 3b^2kv - 2kv^3 \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Diese beiden Gleichungen stellen bei veränderlichem $v$ die Schnittkurve der Tangentenfläche in der $yz$-Ebene dar als geometrischen Ort der Durchstoßpunkte sämtlicher Tangenten der Raumkurve (Erzeugenden der Tangentenfläche) in dieser Koordinatenebene.

Für die besonderen Werte $v = \pm b$ wird $y = \pm b, z = \pm b^3k$, d. h. diesen Parametern entsprechen die beiden Pole $B_1$ und $B_2$. Ist nun $v < b$ so wird $y > b$. Die zu diesen Parameterwerten gehörenden Kurvenpunkte liegen außerhalb der beiden Geraden $y = \pm b$.

$v > b$ erfordert $y < b$. Die entsprechenden Kurvenpunkte liegen innerhalb des Geradenpaares $y = \pm b$.

Substituiert man in die Gleichung (36) der Tangentenfläche die Werte:

$$x = x', \quad y = y' + \frac{b^2}{v}, \quad z = z' + 3b^2kv - 2kv^3,$$

so wird dadurch das Koordinatensystem derart parallel zu sich selbst verschoben, daß der beliebige Punkt $P(v)$ der Selbstdurchdringungskurve in der $yz$-Ebene in den Koordinatenanfangspunkt zu liegen kommt. Die transformierte Flächengleichung beginnt erst mit den Gliedern zweiten Grades:

$$\begin{aligned} \frac{a^4b^8}{v^6}[&- (36b^8k^2v^2 - 108b^6k^2v^4 + 108b^4k^2v^6 - 36b^2k^2v^8)x'^2 \\ &+ (9a^2b^4k^2v^4 - 36a^2b^2k^2v^6 + 36a^2k^2v^8)y'^2 + a^2b^4z'^2 \\ &+ (6a^2b^4kv^2 - 12a^2b^2kv^4)y'z']. \end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist also ein *Doppelpunkt der Tangentenfläche*. Sein Knotenkegel wird analytisch dargestellt durch die gleich Null gesetzten vorstehenden Glieder zweiten Grades, also durch:

$$\begin{aligned} &- 36b^2k^2v^2(b^2 - v^2)^3x'^2 + 9a^2k^2v^4(b^2 - 2v^2)^2y'^2 \\ &+ 6a^2b^2kv^2(b^2 - 2v^2)y'z' + a^2b^4z'^2 = 0, \quad \text{oder} \\ &- 36b^2k^2v^2(b^2 - v^2)^3x'^2 + [a\{3kv^2(b^2 - 2v^2)y' + b^2z'\}]^2 = 0. \end{aligned}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung als Differenz zweier Quadrate in zwei Faktoren zerlegt werden kann, so folgt aus ihr:

$$\{6bkv(b^2 - v^2)^{3/2}x' + 3akv^2(b^2 - 2v^2)y' + ab^2z'\}$$
$$\cdot\{-6bkv(b^2 - v^2)^{3/2}x' + 3akv^2(b^2 - 2v^2)y' + ab^2z'\} = 0.$$

Jeder dieser Faktoren mit Null verglichen stellt die Gleichung einer Ebene dar. Im ursprünglichen Koordinatensystem gedeutet, heißt dies: Der Punkt $P(v)$ der Schnittkurve in der $yz$-Ebene ist ein *biplanarer Doppelpunkt* der Tangentenfläche, dessen beide *Knotenebenen* gegeben sind bzw. durch die Gleichungen

$$\pm 6bkv(b^2 - v^2)^{3/2} \cdot x + 3akv^2(b^2 - 2v^2) \cdot y + ab^2 \cdot z$$
$$+ 2ab^2kv(4v^2 - 3b^2) = 0. \qquad (72)$$

Letztere schneiden sich in der $yz$-Ebene in der Geraden

$$3kv^2(b^2 - 2v^2) \cdot y + b^2z + 2b^2kv(4v^2 - 3b^2) = 0 \qquad (73)$$

als *Knotenkante*. Die Knotenebenen (72) sind die Tangentialebenen der Tangentenfläche im biplanaren Doppelpunkte $P$ ($x = 0$, $v$), und die Knotenkante (73) Tangente der Schnittkurve in der $yz$-Ebene im Punkte $P(v)$.

Da nun der Parameter $v$ jeden beliebigen Wert von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, so sind sämtliche Punkte der Spurkurve der Tangentenfläche in der $yz$-Ebene biplanare Doppelpunkte derselben, und bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine *Knotenlinie oder Doppelkurve der Tangentenfläche*, längs welcher diese sich selbst durchdringt.

Über die Realität der beiden Knotenebenen des Punktes $P(v)$ der Tangentenfläche in der $yz$-Ebene entscheidet nun der Klammerausdruck der Koeffizienten von $x$ in den Gleichungen (72):

Für jeden Parameterwert

$$|v| < b,$$

welchem einerseits nach (2a) stets ein reeller Punkt der Raumkurve, und andererseits nach (71) ein Punkt außerhalb der beiden Geraden $y = \pm b$ der vorliegenden Knotenlinie entspricht, werden die Koeffizienten von $x$ und damit auch die Ausdrücke (72) reell. Sämtliche Punkte der Tangentenfläche in der $yz$-Ebene, die dieser Bedingung genügen, sind *biplanare Doppelpunkte mit reellen Knoten-*

*ebenen*. Sie bilden in ihrer Gesamtheit, als geometrischer Ort der gemeinsamen Spurpunkte je zweier reeller Tangenten der Raumkurve, eine Selbstdurchdringungskurve des reellen Teiles der Tangentenfläche in der $yz$-Ebene, die ganz außerhalb des Geradenpaares $y = \pm b$ liegt.

Wird aber der Parameter

$$v \gtrless b\,,$$

entsprechen ihm also einerseits nach (2a) imaginäre Punkte der Raumkurve und andererseits nach (71) diejenigen Punkte der Tangentenfläche in der $yz$-Ebene, welche sich *innerhalb* der beiden Geraden $y = \pm b$ befinden, so werden die Koeffizienten von $x$ in den Ausdrücken (72) imaginär. Alle zu diesen Parameterwerten gehörenden Punkte in der $yz$-Ebene sind *reelle, biplanare Doppelpunkte der Tangentenfläche mit je zwei konjugiert imaginären Knotenebenen*, deren Knotenkante reell ist. Die stetige Aufeinanderfolge dieser Punkte stellt eine reelle, auf dem imaginären Teil der Tangentenfläche liegende, also *ganz isoliert außerhalb des reellen Teiles derselben verlaufende Knotenlinie der Tangentenfläche in der yz-Ebene dar*, gebildet durch die reellen Schnittpunkte je zweier konjugiert imaginärer Tangenten der Raumkurve, die vollständig innerhalb des Geradenpaares $y = \pm b$ liegt.

Für die besonderen Werte:

$$v = \pm b\,,$$

also für *die beiden Pole* $B_1(0,\ b,\ b^3k)$ und $B_2(0,\ -b,\ -b^3k)$, verschwinden die Koeffizienten von $x$ in (73), und die zwei verschiedenen Knotenebenen fallen je zusammen in der Ebene

$$\left.\begin{aligned} &3b^2ky - z - 2b^3k \\ \text{bzw.}\quad &3b^2ky - z + 2b^3k \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

welche nach (29) identisch sind mit den diesen Punkten entsprechenden stationären Ebenen der Raumkurve oder Wendetangentialebenen der Tangentenfläche. Die beiden Pole $B_1$ und $B_2$ sind somit *uniplanare Doppelpunkte der Tangentenfläche*. Da sie zugleich noch der Doppelkurve in der $yz$-Ebene angehören, sind sie als *Kuspidal- oder Zwickpunkte* derselben zu bezeichnen. In ihnen findet der Übergang der reellen in die konjugiert imaginären

Knotenebenen statt; sie bilden die Grenze zwischen dem isoliert außerhalb der Tangentenfläche verlaufenden Aste der Doppelkurve und dem auf der Fläche selbst liegenden Zweige derselben.

Um die beiden Pole noch genauer auf ihre Beschaffenheit als Punkte der Tangentenfläche zu untersuchen, verschieben wir das ursprüngliche Raumkoordinatensystem so, daß der Pol $B_1(0,\ b,\ b^3k)$ der Raumkurve Koordinatenanfangspunkt wird. Dies erreicht man durch Substitution der Werte

$$x = x'; \qquad y = b + y'; \qquad z = b^3k + z',$$

in die Gleichung (36). Die in Betracht fallenden niedrigst potenzierten Glieder der transformierten Flächengleichung, bezogen auf den Pol $B_1$ als Nullpunkt, lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} & a^4b^4(-6a^2b^4k^2y'^4 - 16a^2b^2ky'^3z' + 15a^2y'^2z'^2 \\ & - 81b^6k^2x'^2y'^2 - 18b^4kx'^2y'z' + 3b^2x'^2z'^2) \\ & - 6a^6b^5y'z'(3b^2ky' - z') + a^6b^6(3b^2ky' - z')^2. \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

Daraus folgt wiederum, daß der Nullpunkt der transformierten Fläche, der Pol $B_1$, ein uniplanarer Doppelpunkt ist, und, da er der Doppelkurve in der $yz$-Ebene angehört, *Kuspidal- oder Zwickpunkt* derselben heißt. Weil nun der analytische Ausdruck für seine Knotenebene:

$$3b^2ky' - z' = 0$$

auch ein Faktor der Glieder dritten Grades (75) der auf ihn bezogenen Flächengleichung ist, so schneidet jede Gerade, die in dieser Ebene liegt und durch den Pol $B_1$ geht, die Tangentenfläche in ihm in vier zusammenfallenden Punkten. Dies ist allgemein das Kriterium für einen *Selbstberührungspunkt* einer Fläche. In unserem Falle rührt diese Eigenschaft daher, daß obige Knotenebene identisch ist mit der stationären Ebene, also der Wendetangentialebene (29) des Poles $B_1$, in welcher jede Gerade die Tangentenfläche in drei konsekutiven Punkten schneidet. Geht nun diese Gerade speziell durch den Pol $B_1$, der ein (uniplanarer) Doppelpunkt der Tangentenfläche ist, hindurch, so tritt noch ein weiterer Schnittpunkt hinzu, so daß die Gerade im Pole vier Punkte mit der Tangentenfläche gemeinsam hat.

Um uns ein Bild über die Beschaffenheit der Tangentenfläche in der Umgebung des Poles $B_1$ zu machen, untersuchen wir einen beliebigen ebenen Schnitt derselben durch diesen Punkt. Der Pol $B_1$ der jeweiligen Schnittkurve liegt auf der Spurellipse des erzeugenden elliptischen Zylinders in der Schnittebene, innerhalb derer sich kein Teil der reellen Tangentenfläche befinden kann. Die Schnittkurve verläuft also ganz außerhalb dieser Ellipse. Als Punkt der Raumkurve selbst muß der Pol $B_1$ eine Spitze sein; seine Rückkehrtangente, die Spurgerade der Knotenebene in der jeweiligen Schnittebene, die im allgemeinen die eben erwähnte Spurellipse durchschneidet, hat in ihm aber vier zusammenfallende Punkte mit der Schnittkurve gemeinsam. Der Pol $B_1$ ist also eine *Spitze zweiter Art oder eine Schnabelspitze*, in welcher die Tangente die beiden sich in der Spitze treffenden Kurvenzweige von derselben Seite berührt. Dieser Punkt zählt als Singularität zweiter Ordnung, da zugleich in ihm die Tangente als Spurgerade der stationären Ebene des Poles $B_1$ ihren Drehsinn ändert. *Er ist eine besondere Art des Selbstberührungsknotens*, in welchem sich die Kurve nicht wie gewöhnlich in zwei verschiedenen Kurvenelementen berührt, sondern *in welchem zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Kurvenelemente vereinigt sind.*

In der Umgebung des Poles $B_1$ läuft somit die Tangentenfläche von allen Seiten außerhalb des erzeugenden elliptischen Zylinders in der Wendetangentialebene, der Knotenebene (74) von $B_1$, gegen den Pol hin flach aus, wie wenn sie dort *zusammengeklemmt* wäre, und geht dann beim Überschreiten der Zylinderfläche in die isolierte, sich asymptotisch der $z$-Achse nach ins Unendliche erstreckende Doppelkurve über, längs welcher sich ihr imaginärer Teil durchdringt.

Auch *die Doppelkurve in der yz-Ebene* bringt in deutlicher Weise die vierpunktige Berührung der in der Schnittebene liegenden Spurgeraden der Knotenebene (74) mit der Spurkurve der Tangentenfläche im Pole $B_1$ zum Ausdruck. Denn als Tangente des Poles $B_1$, als Verbindungsgerade zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Punkte der Knotenlinie, welches Doppelpunkte der Tangentenfläche sind, hat diese Gerade vier Punkte in $B_1$ mit der Schnittkurve gemeinsam. Dies ist nun auch der Grund dafür, daß die Spurgerade der Wendetangentialebene (74) der Tangentenfläche in der eben erwähnten Selbstdurchdringungskurve nicht als Inflexionstangente auftreten kann, und der Pol $B_1$ somit kein Wendepunkt derselben ist.

Die Gleichungen der vier Geraden, in welchen die Knotenebene des Poles $B_1$ dessen Knotenkegel vierten Grades, dargestellt durch:

$$-6a^2b^4k^2y'^4 - 16a^2b^2ky'^3z' + 15a^2y'^2z'^2 - 81b^6k^2x'^2y'^2 + 18b^4kx'^2y'z' + 3b^2x'^2z'^2 = 0,$$

schneidet, erhält man, indem man in diesem Ausdruck den Wert $z' = 3\,b^2ky'$ für die Knotenebene einsetzt. Obige Gleichung ergibt dann:

$$81\,b^4k^2y'^2(a^2y'^2 + b^2x'^2) = 0\,.$$

Dies verlangt

1. $y' = 0$, oder rückwärts transformiert: $y = b$, doppelt

2. $y' = \pm\frac{b}{a}ix'$, „ „ $\pm bix - ay + ab = 0$.

Die vier gesuchten Geraden, welche die Tangentenfläche im Pole $B_1$ in fünf zusammenfallenden Punkten berühren, sind die doppelt gelegte Gerade

$$y = b\,; \qquad z = b^3k\,,$$

die *Wendegerade* der zum Pole $B_1$ gehörenden Wendetangentialebene (29), welche identisch ist mit der Tangente des Oskulationspunktes $B_1$ der Raumkurve, und zwei konjugiert imaginäre Geraden, deren Projektionen auf die $xy$-Ebene gegeben sind durch die Gleichungen

$$\pm bix - ay + ab = 0\,.$$

Jeder ebene Schnitt der Tangentenfläche achter Ordnung durch eine dieser drei Geraden besteht aus der jeweiligen Geraden und noch einer Kurve siebenter Ordnung, die sich beide im Pole $B_1$ berühren. Dieser zählt daher als Doppelpunkt des Gesamtschnittes achter Ordnung, und die eben erwähnte Spurgerade ist *Flachpunkttangente* der $C_7$ und hat somit fünf Punkte mit der Gesamtschnittkurve gemeinsam.

Die Knotenebene endlich, die Wendetangentialebene des Poles $B_1$, schneidet die Tangentenfläche in einer Kurve achter Ordnung, welche in die dreifach gelegte Gerade

$$y = b\,; \qquad z = b^3k\,,$$

die zugehörige Wendegerade, und noch in eine Kurve fünfter Ordnung zerfällt. Der Pol $B_1$, in dem sich beide Teilkurven berühren,

ist ein vierfacher Punkt des Gesamtschnittes, dessen vier Tangenten identisch sind mit der Wendegeraden, die den Gesamtschnitt also in fünf zusammenfallenden Punkten berührt, wie verlangt.

Ganz analoge Resultate gelten auch für den *Pol* $B_2(0, -b, -b^3k)$. Auch er ist ein Zwickpunkt und in gleicher Art wie der Pol $B_1$ ein Selbstberührungspunkt der Tangentenfläche.

Nachdem wir nun im vorstehenden die Schnittkurve der Tangentenfläche in der $yz$-Ebene eingehend untersucht haben, können wir zusammenfassend sie etwa folgendermaßen charakterisieren:

Sie ist eine *rationale Doppelkurve vierten Grades* und besteht aus zwei zentrisch-symmetrisch zueinander gebauten, kongruenten hyperbolischen Ästen, für welche die $y$-Achse gewöhnliche und die $z$-Achse dreifache Asymptote ist. Nur derjenige Zweig der Kurve, welcher außerhalb der beiden Geraden $y = \pm b$, den Schnittgeraden des erzeugenden elliptischen Zylinders in der $yz$-Ebene, liegt, ist *doppelt gelegte Spurkurve der reellen Tangentenfläche, deren sämtliche Punkte biplanare Doppelpunkte derselben mit je zwei reellen Tangentialebenen sind.* Der innerhalb dieser beiden Geraden liegende Kurvenzweig ist eine *isolierte Doppelkurve, längs welcher sich der imaginäre Teil der Tangentenfläche durchdringt, und deren sämtliche Punkte biplanare Doppelpunkte mit je zwei konjugiert imaginären Tangentialebenen sind.* Die beiden Pole $B_1$ und $B_2$, die *Zwickpunkte* der vorliegenden Knotenlinie der Tangentenfläche, bilden den Übergang dieser beiden Teile.

## § 10. Der Asymptotenkegel.

Der Richtungs- oder Asymptotenkegel, dessen Scheitel im Nullpunkt liegt, und der die unendlich ferne Ebene $E_\infty$ des Raumes in derselben ebenen Kurve schneidet wie die Tangentenfläche selbst, wird analytisch dargestellt durch die gleich Null gesetzten Glieder höchsten Grades der Flächengleichung (36), also durch:

$$9\,b^{10}k^2x^6y^2 + b^6x^6z^2 - 6\,b^8kx^6yz + a^6y^6z^2 + 9\,a^2b^8k^2x^4y^4 -$$
$$12\,a^2b^6kx^4y^3z + 3\,a^2b^4x^4y^2z^2 - 6\,a^4b^4kx^2y^5z + 3\,a^4b^2x^2y^4z^2 = 0\,.$$

Dieser Ausdruck läßt sich zusammenfassen in die Form:

$$(b^2x^2 + a^2y^2)\,(3\,b^4kx^2y - b^2x^2z - a^2y^2z)^2 = 0\,. \qquad (76)$$

Der Asymptotenkegel zerfällt somit einerseits in die *zwei konjugiert imaginären Ebenen*

$$y = \pm \frac{b}{a} i \cdot x ,$$

welche sich längs der $z$-Achse als reeller, zweifach zu zählender Erzeugenden desselben durchsetzen, und andererseits in den *doppelt gelegten Kegel dritten Grades*:

$$3 b^4 k x^2 y - b^2 x^2 z - a^2 y^2 z = 0 . \qquad (77)$$

Der Richtungskegel und mit ihm die Tangentenfläche selbst schneiden demnach die unendlich ferne Ebene in zwei durch den unendlich fernen Punkt der $z$-Achse gehenden *konjugiert imaginären Geraden* und in einer *doppelt zu zählenden Kurve dritten Grades*, welche, in Übereinstimmung mit dem früher gefundenen Resultat (Gleichung 12b), als geometrischer Ort sämtlicher Schnittpunkte je zweier paralleler Tangenten, eine *unendlich ferne Doppelkurve der Tangentenfläche* ist.

Der Asymptotenkegel ist, wie man aus seiner Gleichung sofort ersieht, symmetrisch zur $yz$-Ebene und zur $x$-Achse gebaut. Alle drei Koordinatenachsen liegen als Erzeugende selbst auf ihm; ihre genaue Bedeutung ergibt sich am einfachsten aus den Schnitten der Asymptotenfläche mit Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen.

### 1. Schnitt mit einer Ebene parallel der $xy$-Ebene: $z = p$.

(Fig. VII.)

Die Spur des Asymptotenkegels (77) in der Ebene $z = p$, gegeben durch die Gleichung

$$3 b^4 k x^2 y - b^2 p x^2 - a^2 p y^2 = 0 , \qquad (78)$$

ist eine symmetrisch zur $y$-Achse liegende aus zwei Kurvenästen bestehende *Parabel dritter Ordnung*.

Ihr Nullpunkt ist ein *konjugierter Punkt* mit den beiden Tangenten

$$y = \pm \frac{b}{a} i \cdot x .$$

Im Raume gedeutet, heißt dies: *Die z-Achse zählt als zweifache isolierte Erzeugende* der Asymptotenfläche dritten Grades; ihre bei-

den Tangentialebenen stimmen überein mit den konjugiert imaginären Asymptotenebenen des Richtungskegels.

Da die $C_3$ im Nullpunkt einen Doppelpunkt hat, ist sie rational, und ihre Koordinaten lassen sich als rationale Funktionen eines veränderlichen Parameters darstellen. Ein Strahlenbüschel durch den Nullpunkt hat, wenn $\lambda$ einen veränderlichen Parameter bedeutet, die Gleichung

$$y = \lambda x .$$

Jeder Strahl schneidet die $C_3$ nur noch in einem Punkte, so daß einem gegebenen Wert von $\lambda$ nur ein einziger Kurvenpunkt zugeordnet ist. Setzt man vorstehenden Wert für $y$ in (78) ein, so wird die Parameterdarstellung der Kurve:

$$x = \frac{p(b^2 + a^2\lambda^2)}{3b^4 k\lambda} , \quad y = \frac{p(b^2 + a^2\lambda^2)}{3b^4 k} . \tag{79}$$

Vermittels dieser Gleichungen findet man, daß die Kurve drei reelle *Wendepunkte* besitzt, nämlich für $\lambda = 0$ den unendlich fernen Punkt in der Richtung der $x$-Achse mit der Geraden

$$y = \frac{p}{3b^2 k}$$

als *Wendeasymptoten*, und zwei im Endlichen liegende von den Parametern

$$\lambda = \pm \frac{b\sqrt{3}}{a} .$$

Bei positivem $p$ verläuft die Kurve ausschließlich im ersten und zweiten, bei negativem im dritten und vierten Quadranten, so daß durch eine halbe Drehung um die $x$-Achse als Drehachse die entsprechenden Schnittlinien miteinander zur Deckung gebracht werden können.

### 2. Schnitt mit einer Ebene parallel der $xz$-Ebene: $y = n$. (Fig. VIII.)

Der Asymptotenkegel schneidet eine Ebene $y = n$ in einer zur $z$-Achse symmetrisch gebauten *kubischen Parabel* von der Gleichung

$$b^2 x^2 z - 3b^4 k n x^2 + a^2 n^2 z = 0 . \tag{80}$$

Dem Nullpunkt als einfachem Kurvenelement entspricht die Tangente $z = 0$, die $x$-Achse.

Auf den Raum übertragen: *Die $xy$-Koordinatenebene ist Tangentialebene des doppelt gelegten Richtungskegels dritter Ordnung und berührt ihn längs der $y$-Achse.*

Weil die Kurve im unendlich fernen Punkt der $z$-Achse einen *konjugierten Punkt* aufweist, legen wir durch denselben ein Strahlenbüschel, und erhalten dadurch eine zur $z$-Achse parallele Schar von Geraden, die wir als Parameterlinien auffassen können von der Gleichung

$$x = \lambda .$$

Daraus folgt die *Parameterdarstellung der $C_3$*:

$$x = \lambda , \quad z = \frac{3b^4 kn\lambda^2}{b^2\lambda^2 + a^2n^2} . \tag{81}$$

Außer im unendlich fernen Punkt der $x$-Achse ($\lambda = \infty$) weist die Parabel noch zwei im Endlichen liegende *Inflexionspunkte* auf von den Parameterwerten

$$\lambda = \pm \frac{an}{b\sqrt{3}} .$$

Die vorliegende rationale Schnittkurve dritter Ordnung, die wegen der Form des unendlichen Astes in der Umgebung des Nullpunktes als *Glockenlinie* bezeichnet werden kann, liegt bei positivem $n$ ausschließlich im ersten und zweiten, bei negativem $n$ im dritten und vierten Quadranten.

### 3. Schnitt mit einer Ebene parallel der $yz$-Ebene: $x = m$.

(Fig. IX.)

Die Gleichung der zentrisch-symmetrisch zum Koordinatenursprung gebauten Spurkurve dritter Ordnung des Richtungskegels in der Ebene $x = m$ lautet nach (77):

$$a^2y^2z - 3b^4km^2y + b^2m^2z = 0 . \tag{82}$$

Der Nullpunkt ist ein *Wendepunkt*; denn seine Tangente $z = 3b^2ky$ schneidet, unabhängig von $m$, die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten.

Im Raume gedeutet: Die durch die $x$-Achse gehende Ebene

$$z = 3b^2ky$$

ist *Wendetangentialebene des Asymptotenkegels und berührt denselben längs der $x$-Achse als Wendegeraden.*

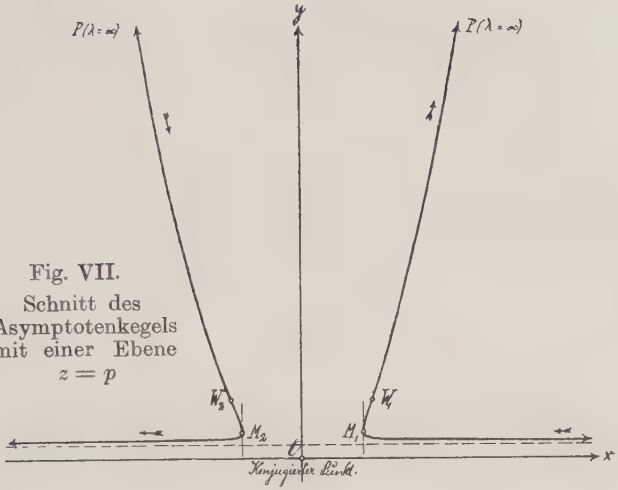



Fig. VII.
Schnitt des Asymptotenkegels mit einer Ebene $z = p$

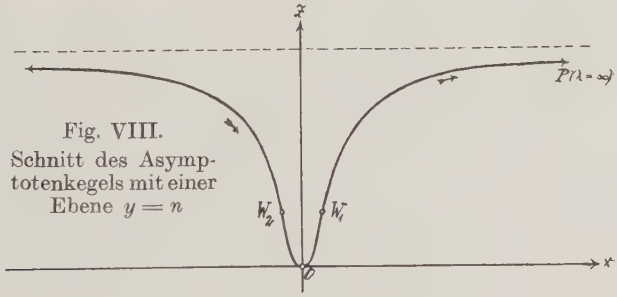



Fig. VIII.
Schnitt des Asymptotenkegels mit einer Ebene $y = n$

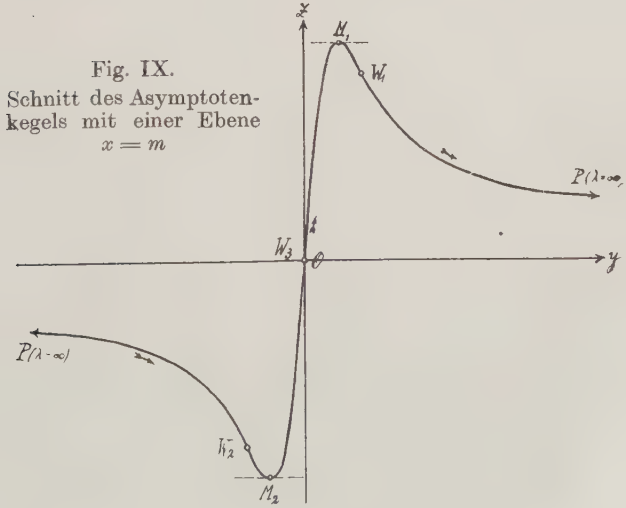



Fig. IX.
Schnitt des Asymptotenkegels mit einer Ebene $x = m$

Wie beim vorigen Schnitt ist auch hier der unendlich ferne Punkt der $z$-Achse ein *konjugierter Punkt.*

Für *die Parameterdarstellung der Kurve* erhält man die Gleichungen:

$$y = \lambda, \quad z = \frac{3b^4 k m^2 \lambda}{a^2\lambda^2 + b^2 m^2}. \tag{83}$$

Außer im Nullpunkt ($\lambda = 0$) besitzt die vorliegende rationale $C_3$ noch zwei im Endlichen befindliche *Wendepunkte* von den Parametern

$$\lambda = \pm \frac{bm\sqrt{3}}{a}.$$

Bei positivem $m$ verläuft sie ganz im ersten und dritten, bei negativem $m$ dagegen im zweiten und vierten Quadranten.

Jede der drei betrachteten Arten ebener Schnitte mit dem doppelt gelegten Asymptotenkegel dritten Grades (77) parallel den Koordinatenebenen ist eine *Newtonsche parabola punctata*; denn sie weisen gemäß dem isolierten vierfachen Punkte der Raumkurve je einen konjugierten Punkt auf, während der übrige Ast entsprechend der in sich geschlossenen Raumkurve unikursal ist.

Jede Schnittkurve besitzt ferner auf dem unendlichen Aste drei reelle Wendepunkte; die Wendetangenten sind die in der Schnittebene liegenden Spuren bzw. der drei durch den Kegelscheitel gehenden Ebenen

$$\left.\begin{aligned} 9\sqrt{3}b^3kx + 3ab^2ky + 8az &= 0 \\ -9\sqrt{3}b^3kx + 3ab^2ky + 8az &= 0 \\ z = 3b^2ky\,. & \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Die beiden ersten schneiden sich in der $yz$-Ebene in der Geraden

$$3b^2ky + 8z = 0\,.$$

die letzte durchsetzt die $x$-Achse.

Jede dieser drei Ebenen entspricht nach den Gleichungen (28) und (29) je zwei parallelen stationären Ebenen der Raumkurve oder Wendetangentialebenen der Tangentenfläche. Sie sind *Wendetangentialebenen des Asymptotenkegels* und schneiden diesen in je drei zusammenfallenden Geraden, den *Wendegeraden* des Richtungskegels.

Um die Wendegerade der ersten Wendetangentialebene (84) zu bestimmen, berechnet man aus der ersten Gleichung die Koordinate $z$:

$$z = -\frac{9\sqrt{3}b^3k \cdot x + 3ab^2ky}{8a}$$

und setzt diesen Wert in Gleichung (77) ein. Dann folgt:

$$9ab^2x^2y + 3\sqrt{3}b^3x^3 + 3\sqrt{3}a^2bxy^2 + a^3y^3 = 0,$$

$$(ay + \sqrt{3}bx)^3 = 0$$

$$ay + \sqrt{3}bx = 0, \quad \text{dreifach.}$$

Diese Gleichung stellt den Grundriß der gesuchten Wendegeraden dar. Durch Elimination der beiden anderen Koordinaten gelangt man zu den Ausdrücken der übrigen Projektionen. Die Gleichungen der drei Projektionen der *ersten Wendegeraden* auf die Koordinatenebenen lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{3}bx + ay &= 0 \\ 3\sqrt{3}b^3kx + 4az &= 0 \\ 3b^2ky - 4z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Analog ist *die zweite Wendegerade* des Asymptotenkegels dargestellt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{3}bx + ay &= 0 \\ -3\sqrt{3}b^3kx + 4az &= 0 \\ 3b^2ky - 4z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{85a}$$

Weil die Projektionen dieser zwei Geraden auf die $yz$-Ebene zusammenfallen, so liegen beide Wendegeraden in ein und derselben Ebene durch den Kegelscheitel:

$$3b^2ky - 4z = 0.$$

*Die dritte Wendegerade* des Asymptotenkegels ist, wie früher festgestellt, die doppelt gelegte $x$-Achse.

Nach den Gleichungen (30) und (31) entspricht jede dieser drei Wendekanten je zwei parallelen Wendegeraden der Tangentenfläche.

Aus den oben gefundenen Resultaten ergeben sich für den Asymptotenkegel der abwickelbaren Tangentenfläche unserer Raumkurve zusammengefaßt folgende Eigenschaften:

Er besteht aus *zwei konjugiert imaginären, die z-Achse durchsetzenden Ebenen*, welche zu dem im Unendlichen auf dieser Achse liegenden vierfachen isolierten Punkte der Raumkurve gehören, *und einem doppelt gelegten kubischen Kegel*, welcher die unendlich ferne Ebene in derselben *Doppelkurve dritten Grades* schneidet wie die der geschlossenen Raumkurve zugehörige Tangentenfläche. Er verläuft ausschließlich im ersten und zweiten, bzw. siebenten und achten Oktanten. Die $yz$-Ebene ist Symmetrieebene. Alle drei Koordinatenachsen sind Erzeugende des Richtungskegels; unter ihnen zählt die $z$-Achse sowohl für die imaginären Asymptotenebenen als auch für den Asymptotenkegel dritten Grades als zweifache Gerade. In Übereinstimmung mit den sechs Oskulationspunkten der Raumkurve besitzt der Richtungskegel drei Wendegeraden; diese sind, wie auch die zugehörigen Wendetangentialebenen, je parallel den beiden entsprechenden Wendegeraden, bzw. Wendetangentialebenen der Tangentenfläche.

## § 11. Die Doppelkurven der Tangentenfläche.

Bei der Untersuchung der Tangenteneigenschaften der Raumkurve fanden wir zur Bestimmung der Parameterwinkel $u$ und $u'$ zweier sich schneidender, nicht unendlich benachbarter Tangenten die Gleichungen (12):

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \sin u' = \sin u; \quad \cos u' = -\cos u\\
&\text{b)}\quad \sin u' = -\sin u; \quad \cos u' = -\cos u\\
&\text{c)}\quad \sin u' = -\frac{1}{2}(\sin u - \sqrt{3}\cos u); \quad \cos u' = \frac{1}{2}(\cos u + \sqrt{3}\sin u)\\
&\text{d)}\quad \sin u' = -\frac{1}{2}(\sin u + \sqrt{3}\cos u); \quad \cos u' = \frac{1}{2}(\cos u - \sqrt{3}\sin u).
\end{aligned}\right\} \quad (86)$$

Der geometrische Ort der aufeinanderfolgenden Schnittpunkte zweier Tangenten der Raumkurve oder geradliniger Erzeugenden der abwickelbaren Tangentenfläche, deren Parameterwinkel durch obige Beziehungen bestimmt sind, ist eine *Doppelkurve der Tangentenfläche*, längs welcher sich diese selbst durchdringt.

Die erste Bedingung (86a) führte, wie früher gefunden, auf eine *ebene Doppelkurve vierten Grades in der yz-Ebene*, gebildet durch den Schnitt sowohl der reellen, wie der imaginären, paarweise sym-

metrisch zueinander in bezug auf die $yz$-Ebene liegenden geradlinigen Erzeugenden der Tangentenfläche.

Die Gleichungen (86 b) wiesen darauf hin, daß sich je zwei parallele Erzeugende der Tangentenfläche, derer Parameterwinkel um 180° verschieden sind, im Unendlichen schneiden. Die Untersuchung des Asymptotenkegels (77) ergab als Ortskurve dieser Schnittpunkte eine doppelt gelegte *Kurve dritten Grades in der unendlich fernen Ebene des Raumes.*

Die Cayleyschen Gleichungen lieferten für die Anzahl der „Punkte in zwei Linien" die Zahl fünfzehn, welche gleich ist der *Gesamtordnung der Doppelkurve der Tangentenfläche.*

Somit besitzt letztere außer den soeben erwähnten beiden Selbstdurchdringungskurven, deren Grad zusammen sieben beträgt, *noch eine Doppelkurve achter Ordnung*, welche mit Hilfe der Bedingungen (86c und d) gefunden werden kann.

Die Werte für die gemeinschaftliche Abszisse $x$ des Schnittpunktes zweier geradliniger Erzeugenden der Tangentenfläche von den Parametern $u$ und $u'$ haben wir früher (Gleichung 10) aufgestellt. In gleicher Weise wie dort gelangt man auch zu den entsprechenden Ausdrücken für $y$ und $z$. Die Koordinaten des gemeinschaftlichen Schnittpunktes werden dann:

$$x = a\frac{\sin u - \sin u'}{\sin u\cos u' - \cos u\sin u'} = \frac{a\sin u'(3-2\sin^2 u') - \sin u(3-2\sin^2 u)}{\sin u'\cos u' - \sin u\cos u}$$

$$y = b\frac{\cos u - \cos u'}{\sin u'\cos u - \cos u'\sin u} = \frac{2b}{3}\frac{\sin^3 u - \sin^3 u'}{\sin^2 u - \sin^2 u'}$$

$$z = 2b^3k\frac{\sin^2 u\sin^2 u'}{\sin u + \sin u'} = b^3k\frac{\sin u\sin u'[\cos u(3-2\sin^2 u') - \cos u'(3-2\sin^2 u)]}{\sin u\cos u - \sin u'\cos u'}$$

(Gleichung 87). Setzt man hierin die den Gleichungen (86c) entsprechenden Werte für $\sin u'$ und $\cos u'$ ein, so erhält man nach einigen Umformungen als *Parameterdarstellung* der diesen Bedingungen entsprechenden Doppelkurve der Tangentenfläche:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a\sqrt{3}}{\sin u + \sqrt{3}\cos u} \\ y &= \frac{b}{\sin u + \sqrt{3}\cos u} \\ z &= b^3k\sin^2 u\frac{(\sin u - \sqrt{3}\cos u)^2}{\sin u + \sqrt{3}\cos u}. \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

Auf gleiche Art ergeben sich für die Koordinaten der Doppelkurve, hervorgegangen aus den Bedingungen (86d), die Parameterformen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-a\sqrt{3}}{\sin u - \sqrt{3}\cos u} \\ y &= \frac{b}{\sin u - \sqrt{3}\cos u} \\ z &= b^3 k \sin^2 u \frac{(\sin u + \sqrt{3}\cos u)^2}{\sin u - \sqrt{3}\cos u}. \end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

Bei variablem Parameter $u$ stellt jede der beiden Gleichungsgruppen (88) und (89) je eine Raumkurve dar, deren Koordinaten als Funktionen des Parameters $u$ gegeben sind, und die gemäß ihrer Herleitung eine Selbstdurchdringungskurve der Tangentenfläche ist.

Den Charakter der Doppelkurve lassen die Gleichungen (88) sofort daran erkennen, daß die Koordinaten für die beiden verschiedenen Parameterwinkel

$$(30° - u) \text{ und } (30° + u) \quad \text{oder} \quad (210° - u) \text{ und } (210° + u)$$

stets dieselben Werte annehmen.

Die gleiche Eigenschaft zeigen die Gleichungen (89) für je die zwei verschiedenen Parameterwinkel

$$(150° - u) \text{ und } (150° + u) \quad \text{oder} \quad (330° - u) \text{ und } (330° + u).$$

Bevor wir auf die nähere Einzeluntersuchung dieser Doppelkurven eintreten, wollen wir noch einige ihnen *gemeinsame Beziehungen* hervorheben, auf welche schon der sehr ähnliche Bau ihrer Gleichungen hinweist:

1. Setzt man in jedem der beiden Gleichungssysteme (88) und (89) für sich statt $u : (180° + u)$, so bleiben alle Koordinaten dem absoluten Werte nach gleich, ändern aber ihr Vorzeichen, d. h. *jede der vorliegenden Doppelkurven der Tangentenfläche liegt symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt.*

2. Wird für den Parameterwinkel in einer der beiden Gleichungsgruppen $u$, in der anderen das Supplement $(180° - u)$ substituiert, so stimmen die entsprechenden Koordinaten miteinander vollständig überein, nur die Abszissen $x$ erhalten entgegengesetztes

Vorzeichen. Demnach *liegen die beiden Selbstdurchdringungskurven symmetrisch zueinander in bezug auf die yz-Ebene.*

3. Wählt man als Parameterwinkel in den Gleichungen (88) $u$, in den Gleichungen (89) aber $(-u)$, so sind die bezüglichen Werte für $x$ gleich, während sich diejenigen für $y$ und $z$ durch verschiedenes Vorzeichen voneinander unterscheiden. *Die beiden Doppelkurven liegen also symmetrisch zueinander in bezug auf die x-Achse.*

4. Aus den Gleichungen (88) folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y}{x} = \frac{b}{a\sqrt{3}}, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a\sqrt{3}}x, \text{ unabhängig vom Parameter } u; \\ &\text{analog aus (89):} \\ &\frac{y}{x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}, \text{ oder } y = -\frac{b}{a\sqrt{3}}x, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Diese Beziehungen, welche die Projektionen der entsprechenden Raumkurven auf die $xy$-Ebene darstellen, sind der analytische Ausdruck für zwei sich im Nullpunkt schneidende, zueinander achsensymmetrisch liegende Geraden. Wir gelangen somit zu dem bemerkenswerten Resultate:

Die den Bedingungen (88) und (89) entsprechenden, zueinander in bezug auf die $yz$-Ebene und die $x$-Achse symmetrisch gebauten Doppelkurven der Tangentenfläche sind *ebene Kurven. Sie liegen in den beiden bzw. durch die Gleichungen*

$$y = \pm\frac{b}{a\sqrt{3}}x \quad (91)$$

*dargestellten Ebenen*, welche sich längs der $z$-Achse durchsetzen, und für welche die $yz$-Ebene Symmetrieebene ist.

Diese beiden obige Doppelkurven enthaltenden Ebenen, die wir in der Folge mit $E_1$ und $E_2$ bezeichnen werden, schneiden den erzeugenden elliptischen Zylinder

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

in je zwei Erzeugenden bzw. von den Gleichungen

$$x = \pm\frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad y = \pm\frac{b}{2}. \quad (92)$$

## Die Doppelkurve in der Ebene $E_1$.

(Fig. X.)

Die Parametergleichungen der zentrisch-symmetrisch zum Koordinatenursprung gebauten Doppelkurve der Tangentenfläche in der Ebene $E_1$:

$$y = \frac{b}{a\sqrt{3}}\, x$$

sind durch die Ausdrücke (88) gegeben.

Um ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten zu erhalten, bringen wir am einfachsten die Ebene $E_1$ zum Schnitt mit der Tangentenfläche, und setzen zu diesem Zwecke obigen Wert für $y$ in der Gleichung (36) derselben ein. Dann folgt als Gleichung der Projektion der vorliegenden Doppelkurve auf die $xz$-Ebene:

$$81b^6k^2x^8 - 72\sqrt{3}ab^3kx^7z + 48a^2x^6z^2 - 324a^2b^6k^2x^6 + 144\sqrt{3}a^3b^3kx^5z$$
$$+ 486a^4b^6k^2x^4 - 72\sqrt{3}a^5b^3kx^3z - 324a^6b^6k^2x^2 + 81a^8b^6k^2 = 0.$$

Dieser Ausdruck läßt sich zusammenfassen in ein vollständiges Quadrat:

$$(9b^3kx^4 - 4\sqrt{3}ax^3z - 18a^2b^3kx^2 + 9a^4b^3k)^2 = 0.$$

Die Ebene $E_1$ schneidet somit wirklich die Tangentenfläche in einer Doppelkurve, deren *Vertikalprojektion* die Gleichung zukommt:

$$9b^3kx^4 - 4\sqrt{3}ax^3z - 18a^2b^3kx^2 + 9a^4b^3k = 0 \qquad (93)$$

Diese stimmt überein mit Gleichung (47), welche den Aufriß der Ortskurve von Schnittpunkten der Vertikalprojektionen sämtlicher entsprechender Parameterlinien $v = +c$ und $v = -c$ darstellt.

Substituiert man analog den Wert für $x$:

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{b}\, y$$

in die Gleichung (36) der Tangentenfläche ein, so erhält man nach Kürzung mit dem konstanten Faktor 4 als *Gleichung der Projektion der Doppelkurve auf die yz-Ebene*:

$$81b^4k^2y^8 - 72b^2ky^7z + 16y^6z^2 - 108b^6k^2y^6 + 48b^4ky^5z$$
$$+ 54b^8k^2y^4 - 8b^6ky^3z - 12b^{10}k^2y^2 + b^{12}k^2 = 0.$$

Die linke Seite bildet das vollständige Quadrat des Ausdruckes:

$$9b^2ky^4 - 4y^3z - 6b^4ky^2 + b^6k = 0. \tag{94}$$

Dies ist die Gleichung der Projektion der Doppelkurve auf die $yz$-Ebene; sie ist identisch mit Gleichung (59a), welche den geometrischen Ort der Doppelpunkte der Seitenrisse aller Parameterlinien $v = \pm c$ darstellt.

Da beide Projektionen auf die $xz$- und $yz$-Ebene als Kurven vierter Ordnung auftreten, so folgt: *Die vorliegende Doppelkurve der Tangentenfläche ist vom vierten Grade.*

Die Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten für die Doppelkurve in der Ebene $E_1$ selbst erhält man nun auf folgende Art:

Der Richtungskoeffizient der Spurgeraden dieser Ebene in der $xy$-Koordinatenebene ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a\sqrt{3}};$$

Dann wird

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{b}{\sqrt{3a^2 + b^2}} = c, \tag{95}$$

wobei $\varphi$ den Winkel bedeutet, welchen obige Spurgerade mit der positiven $x$-Achse einschließt, der auch gleich ist dem Ebenenwinkel zwischen der Ebene $E_1$ und der $xz$-Koordinatenebene, und wo die zur Abkürzung für $\sin\varphi$ eingeführte Konstante $c$ stets

$$|c| < 1.$$

Um die bei den folgenden Untersuchungen öfters vorkommenden Übergänge vom Koordinatensystem der Ebene $E_1$ zum ursprünglichen Koordinatensystem in der $yz$-Ebene möglichst deutlich zu gestalten, bezeichnen wir die laufenden Koordinaten des Systems in der Ebene $E_1$ mit $\eta$ und $\zeta$ statt $y$ und $z$. Für den Übergang von der $yz$-Ebene zur Ebene $E_1$ oder $\eta\zeta$-Ebene gelten nun die Beziehungen:

$$\begin{cases} y = \eta\sin\varphi = c\eta \\ z = \zeta, \end{cases} \tag{96}$$

also umgekehrt:

$$\begin{cases} \eta = \dfrac{y}{\sin\varphi} = \dfrac{\sqrt{3a^2 + b^2}}{b}\, y = \dfrac{y}{c}, \\ \zeta = z. \end{cases} \tag{96a}$$

*Die Parametergleichungen* der Doppelkurve für $\eta$ und $\zeta$ ergeben sich einfach dadurch, daß man für $y$ und $z$ die Werte (96) in die Gleichungen (88) und (89) einführt. Sie lauten dann:

$$\left\{\begin{array}{l} \eta = \dfrac{b}{c\,(\sin u + \sqrt{3}\cos u)}\,, \\ \zeta = b^3 k \sin^2 u \dfrac{(\sin u - \sqrt{3}\cos u)^2}{\sin u + \sqrt{3}\cos u}\,. \end{array}\right. \tag{97}$$

Substituiert man nun die Ausdrücke (96) in Gleichung (94), so erhält man als *Gleichung der Doppelkurve in der Ebene $E_1$ in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten*:

$$\left.\begin{array}{rc} & 9b^2c^4k\eta^4 - 4c^3\eta^3\zeta - 6b^4c^2k\eta^2 + b^6k = 0 \\ \text{oder} & b^2k\,(3c^2\eta^2 - b^2)^2 - 4c^3\eta^3\zeta^3 = 0\,, \\ & \zeta = \dfrac{b^2k}{4c^3}\cdot\dfrac{(3c^2\eta^2 - b^2)^2}{\eta^3}\,. \end{array}\right\} \tag{98}$$

Aus diesen Gleichungen bestätigen sich die oben hergeleiteten Resultate, wonach *die vorliegende Doppelkurve vom vierten Grade ist und symmetrisch zum Nullpunkt liegt.*

Ihr unendlich ferner Punkt in der Richtung der $\zeta$-Achse ist ein *dreifacher Punkt, ein Spitzpunkt*, dessen drei Tangenten zusammenfallen in der *$\zeta$-Achse als dreifach zu zählender Asymptote.*

*Die vierte Asymptote* wird dargestellt durch die Gleichung

$$\zeta = \frac{9b^2ck}{4}\,\eta\,.$$

Sie ist die in der Ebene $E_1$ liegende Spur der durch Gleichung (26) gegebenen Doppeltangentialebene der Tangentenfläche.

Die vorliegende Kurve vierten Grades ist *rational oder unikursal.* Denn der unendlich ferne Spitzpunkt in der Richtung der $\zeta$-Achse ist drei Doppelpunkten (zwei Spitzen- und einem Knotenpunkt) gleichwertig. Aus dieser Eigenschaft heraus kann man eine neue Parameterdarstellung gewinnen, indem man durch den Spitzpunkt ein Geradenbüschel legt, von welchem jeder Strahl die Kurve nur noch in einem Punkte schneidet. Das Geradenbüschel besteht aus einer Schar von zur $\zeta$-Achse parallelen Geraden von der Gleichung

$$\eta = \lambda\,,$$

wo $\lambda$ einen veränderlichen Parameter bedeutet.

Mit Hilfe dieser Beziehung erhalten wir die *neue Parameterdarstellung der Doppelkurve* in der Ebene $E_1$:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \lambda \\ \zeta &= \frac{b^2 k}{4c^3}\,\frac{(3c^2\lambda^2 - b^2)^2}{\lambda^3} \end{aligned}\right\} \qquad (99)$$

Vermittels dieser Gleichungen ergibt sich, daß *die Ordinate* $\zeta$ in den beiden zu den Parametern

$$\lambda = \pm\frac{b}{c\sqrt{3}}$$

gehörigen Punkten $P(\pm\frac{b}{c\sqrt{3}},\ 0)$ ihren *Maximal- bzw. Minimalwert erreicht.* In ihnen berührt die *$\eta$-Achse als Doppeltangente* die Kurve. Sie ist die in der Ebene $E_1$ liegende gemeinsame Spurgerade zweier Doppeltangentialebenen der Tangentenfläche, nämlich der $xy$- und der durch Gleichung (26) dargestellten Ebene. Ihre beiden Berührungspunkte entsprechen den in den Doppelgeraden $x = \pm a$ der $xy$-Ebene liegenden Punkten $D_1$ und $D_3$:

$$x = \pm a; \qquad y = \pm\frac{b}{\sqrt{3}}; \qquad z = 0$$

der Tangentenfläche. Da diese beiden Punkte zugleich noch der Doppelkurve angehören, berührt die $\eta$-Achse des Systems in der Ebene $E_1$, die Gerade $y = \frac{b}{a\sqrt{3}}$ der $xy$-Koordinatenebene, also die Spur der durch Gleichung (26) dargestellten Doppeltangentialebene in der letzteren, die Tangentenfläche in ihnen in je vier zusammenfallenden Punkten, wie schon bei der Untersuchung der Schnittkurve derselben mit der $xy$-Ebene bemerkt wurde.

Zur Bestimmung der Parameter der *Wendepunkte* besteht die Gleichung:

$$\begin{aligned} (3c^2\lambda^2 - b^2)(c^2\lambda^2 + 2b^2) - 3c^2\lambda^2(c^2\lambda^2 + b^2) &= 0, \qquad \text{oder} \\ 2b^2c^2\lambda^2 - 2b^4 &= 0, \qquad \text{also} \\ \lambda &= \pm\frac{b}{c}. \end{aligned}$$

Diese Parameterwerte liefern die zwei einzigen Wendepunkte der Kurve:

$$W_1\left(\frac{b}{c},\ b^3k\right) \qquad \text{und} \qquad W_2\left(-\frac{b}{c},\ -b^3k\right).$$

Ihren zueinander parallel verlaufenden Inflexionstangenten kommen bzw. die Gleichungen zu:

$$3b^2ck\eta - \zeta \mp 2b^3k = 0.$$

Die Koordinaten des Wendepunktes $W_1$:

$$\eta = \frac{b}{c}; \qquad \zeta = \pm b^3k,$$

oder, auf unser Raumkoordinatensystem bezogen:

$$x = a\sqrt{3}, \qquad y = b, \qquad z = b^3k,$$

gehören nach den Parametergleichungen (97) sowohl zu dem Parameterwinkel $u = 90°$ als auch $u = 330°$, d. h. der Wendepunkt $W_1$ der vorliegenden Doppelkurve wird gebildet durch den Schnitt derjenigen beiden Erzeugenden der Tangentenfläche, welche den obigen Parameterwinkeln entsprechen. Diese beiden Erzeugenden sind aber nach den Gleichungen (30) und (31) Wendegeraden der Tangentenfläche, und die Tangente des Wendepunktes $W_1$ ist die Schnittgerade der zur $x$-Achse parallel verlaufenden Wendeberührungsebene des Poles $B_1(u = 90°)$:

$$3b^2ky - z - 2b^3k = 0$$

mit der Wendeberührungsebene des Oskulationspunktes $O_4(u = 330°)$

$$-9\sqrt{3}b^3kx + 3ab^2ky + 8az + 16ab^3k = 0,$$

wie vermittels der Substitutionsformeln (96a) gezeigt werden kann.

Ebenso ergibt sich, daß der Wendepunkt $W_2\left(-\frac{b}{c}, -b^3k\right)$ der Doppelkurve gebildet wird durch den Schnitt der zu den Parametern $u = 270°$ und $u = 150°$ gehörenden Tangenten der Raumkurve, welches Wendegeraden der Tangentenfläche sind, und die Tangente des Wendepunktes $W_2$ ist die Schnittgerade der Wendeberührungsebene des Poles $B_2$ $(u = 270°)$ mit derjenigen des Oskulationspunktes $O_2(u = 150°)$.

Da nun außer den genannten Wendetangentialebenen die Tangentenfläche noch zwei weitere aufweist, die identisch sind mit den stationären Ebenen der Oskulationspunkte

$$O_1(u = 30°) \quad \text{und} \quad O_3(u = 210°),$$

so bleibt noch zu untersuchen, welche Bedeutung den Punkten der Doppelkurve, welche zu den Parameterwinkeln 30° und 210°

gehören, zukommt. Ihnen entsprechen nach den Gleichungen (97) bzw. die Koordinaten

$$\eta = \pm \frac{b}{2c}; \qquad \zeta = + \frac{b^2 k}{8},$$

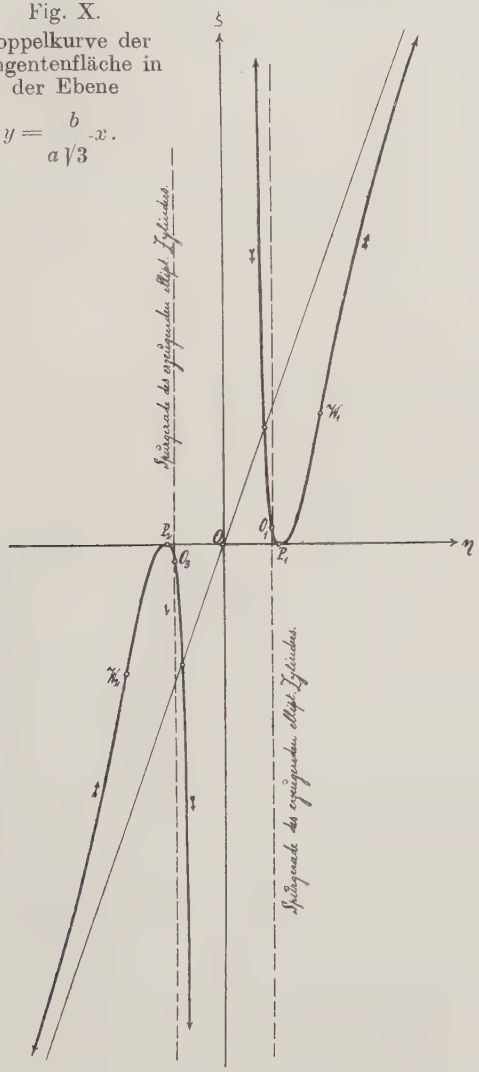



Fig. X.
Doppelkurve der Tangentenfläche in der Ebene
$E_1 : y = \frac{b}{a\sqrt{3}} x.$

oder, bezogen auf unser Raumkoordinatensystem:

$$x = \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}; \qquad y = + \frac{b}{2}; \qquad z = \pm \frac{b^3 k}{8}.$$

d. h. die beiden Punkte sind identisch mit den *Oskulationspunkten $O_1$ und $O_3$ der Gratlinie der Tangentenfläche* selbst. Sie liegen auf den früher erwähnten beiden Erzeugenden (92) des elliptischen Zylinders, in welchen dieser von der Ebene $E_1$ geschnitten wird, und welche in der letzteren zwei der $\zeta$-Achse parallele Geraden von den Gleichungen

$$\eta = \pm \frac{b}{2c}$$

darstellen.

Da nun innerhalb des vom elliptischen Zylinder umschlossenen Raumes kein Teil der reellen Tangentenfläche liegen kann, so muß derjenige Zweig der Doppelkurve, welcher innerhalb des von den beiden Geraden

$$\eta = \pm \frac{b}{2c}$$

begrenzten Flächenstreifens der Ebene $E_1$ liegt, gebildet werden durch die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte je zweier konjugiert imaginärer Erzeugenden der Tangentenfläche, während nur der außerhalb dieses Streifens befindliche Zweig der Doppelkurve wirkliche Spurkurve der Tangentenfläche ist, längs welcher sich die reellen Erzeugenden derselben durchschneiden. Wir haben somit hier ganz analoge Verhältnisse wie bei der Doppelkurve in der $yz$-Ebene, und die beiden Punkte $O_1$ und $O_3$, welche den Übergang der von den reellen und den konjugiert imaginären Erzeugenden der Tangentenfläche gebildeten Kurvenzweige darstellen, besitzen dieselbe Bedeutung wie die beiden Pole $B_1$ und $B_2$.

Diese durch rein geometrische Anschauung gewonnenen Resultate lassen sich in gleicher Weise wie früher auch analytisch herleiten. Schon bei der Untersuchung der Extremwerte und der Wendepunkte der vorliegenden Doppelkurve mit Benützung der Parameterdarstellung (97) ergibt sich, daß die beiden Punkte $O_1(u = 30°)$ und $O_3(u = 210°)$ sowohl als absolute Maxima in bezug auf beide Koordinatenachsen wie auch als Wendepunkte auftreten, genau gleich wie die oben erwähnten Pole $B_1$ und $B_2$ bei der Doppelkurve der $yz$-Ebene. Dies rührt daher, daß in der vorliegenden Doppelkurve die beiden voneinander verschiedenen, aber denselben Kurvenpunkt erzeugenden Parameterwinkel $(30° - u)$ und $(30° + u)$, oder, was damit übereinstimmt, $(210° - u)$ und $(210° + u)$, für $u = 0°$ in den Parameterwerten $90°$ und $270°$ zusammenfallen.

Wir untersuchen nun den Oskulationspunkt

$$O_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad \frac{b}{2},\quad \frac{b^3k}{8}\right)$$

auf seine Bedeutung als Punkt der Tangentenfläche. Zu diesem Zwecke projizieren wir ihn in den Koordinatenursprung durch Substitution der Transformationsformeln

$$x = x' + \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad y = y' + \frac{b}{2}, \qquad z = z' + \frac{b^3k}{8}$$

in Gleichung (36) der Tangentenfläche. Die niedrigst potenzierten Glieder der transformierten Flächengleichung lauten dann:

$$\frac{3a^3b^5}{64}(-81\sqrt{3}b^7k^2x'^3 - 27a^3b^4k^2y'^3 - 351ab^6k^2x'^2y' - 144ab^4kx'^2z'$$
$$- 117\sqrt{3}a^2b^5k^2x'y'^2 - 48a^3b^2ky'^2z' - 64a^2bx'z'^2 - 64a^3y'z'^2)$$
$$- \frac{a^4b^6}{64}(243b^6k^2x'^2 - 9a^2b^4k^2y'^2 + 64a^2z'^2 - 54\sqrt{3}ab^5k^2x'y'$$
$$+ 144\sqrt{3}ab^3kx'z' + 48a^2b^2k^2y'z').$$

Die Gleichung beginnt erst mit Gliedern zweiten Grades. Der Nullpunkt, der Oskulationspunkt $O_1$, ist somit wirklich ein *Doppelpunkt* der Tangentenfläche. Sein Knotenkegel, dargestellt durch die mit Null verglichenen Glieder zweiten Grades, welche ein vollständiges Quadrat bilden:

$$(9\sqrt{3}b^3kx' + 3ab^2ky' + 8az')^2 = 0,$$

zerfällt in die doppelt gelegte Ebene

$$9\sqrt{3}b^3kx' + 3ab^2ky' + 8az' = 0.$$

Aufs ursprüngliche Koordinatensystem bezogen, lautet ihre Gleichung:

$$9\sqrt{3}b^3k \cdot x + 3ab^2ky + 8az - 16ab^3k = 0, \qquad (100)$$

d. h. der Oskulationspunkt $O_1$ ist ein *uniplanarer Doppelpunkt* der Tangentenfläche, dessen Knotenebene nach (28) übereinstimmt mit seiner Wendeberührungsebene, bzw. Wendetangentialebene der Tangentenfläche. Da er als uniplanarer Doppelpunkt der Doppelkurve in der Ebene $E_1$ angehört, ist er als *Zwickpunkt* derselben zu bezeichnen.

Die Glieder dritten Grades der transformierten Flächengleichung lassen sich, abgesehen vom konstanten Faktor vor der Klammer, zusammenfassen in das Produkt

$$(9\sqrt{3}b^3kx' + 3ab^2ky' + 8az') \cdot$$
$$(9b^4kx'^2 + 9a^2b^2ky'^2 + 12\sqrt{3}ab^3kx'y' - 8\sqrt{3}ab^2x'z' - 8a^2y'z').$$

Da somit der analytische Ausdruck für die Knotenebene des uniplanaren Doppelpunktes $O_1$ auch ein Faktor der Glieder dritten Grades ist, so schneidet jede durch $O_1$ gelegte der Knotenebene angehörende Gerade die Tangentenfläche in ihm in vier zusammenfallenden Punkten, d. h. der Oskulationspunkt $O_1$ ist ein *Selbstberührungspunkt der Tangentenfläche*, in ganz analoger Weise wie der Pol $B_1$.

Jede durch ihn gelegte Ebene schneidet im allgemeinen die Tangentenfläche in einer Kurve, in der $O_1$ als *Schnabelspitze* auftritt, in welcher zwei unmittelbar aufeinanderfolgende reelle Kurvenelemente vereinigt sind, und die Tangente die Kurve vierpunktig berührt. Letztere Eigenschaft gilt auch für die Doppelkurve in der Ebene $E_1$, indem hier die Tangente des Punktes $O_1$ als Verbindungsgerade zweier konsekutiver Knotenpunkte der Tangentenfläche vier zusammenfallende Punkte mit derselben gemeinsam hat. Aus diesem Grunde tritt $O_1$ nicht als Wendepunkt der vorliegenden Doppelkurve auf, wie zu erwarten ist, sondern als reguläres Kurvenelement.

In gleicher Art kann auch der Oskulationspunkt

$$O_3\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{b}{2}, \quad -\frac{b^3k}{8}\right)$$

untersucht werden. Auch er ist ein *Zwickpunkt* der Tangentenfläche und trennt den isoliert außerhalb der Fläche verlaufenden Teil der Doppelkurve mit je zwei imaginären Tangentialebenen in jedem Punkte von dem auf der Fläche selbst liegenden Teile, welcher in jedem Punkte je zwei reelle Tangentialebenen besitzt.

Nach diesen Untersuchungen können wir die Spurkurve der Tangentenfläche in der Ebene $E_1$:

$$y = \frac{b}{a\sqrt{3}}x$$

zusammenfassend etwa folgendermaßen kennzeichnen: Sie ist eine

symmetrisch zum Nullpunkt gebaute ebene Doppelkurve vierten Grades der Tangentenfläche und liegt ausschließlich im ersten und dritten Quadranten. Sie besteht aus zwei kongruenten, hyperbolischen Ästen, die sich längs der $\zeta$-Achse als dreifacher und längs der Geraden

$$\zeta = \frac{9b^2ck}{4}\eta$$

als einfacher Asymptote ins Unendliche erstrecken. Die Scheitel dieser Äste liegen auf der $\eta$-Achse, welche eine Doppeltangente der Kurve ist.

Da diese wegen des unendlich fernen Spitzpunktes in der Richtung der Ordinatenachse eine rationale Kurve ist, kann sie von einem beweglichen Punkte mit wachsendem Parameter in einem einzigen, ununterbrochenen Zuge in der Richtung des Pfeiles (Fig. X) durchlaufen werden.

Nur derjenige Teil der Kurve, welcher außerhalb des der $\zeta$-Achse parallelen Geradenpaares

$$\eta = \pm \frac{b}{c\sqrt{3}}$$

liegt, ist *Spurkurve der reellen Tangentenfläche*, längs welcher sich diese selbst durchdringt. Der innerhalb dieser Geraden liegende Kurvenzweig ist *isolierte Doppelkurve*, gebildet durch die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte je zweier konjugiert imaginärer Erzeugenden der Tangentenfläche. Die beiden Oskulationspunkte $O_1(u = 30°)$ und $O_2(u = 210°)$ der Raumkurve trennen als *Zwickpunkte* der Doppelkurve diese beiden Teile voneinander.

### Die Doppelkurve in der Ebene $E_2$.

Bei der Untersuchung der durch die Parametergleichungen (89)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-a\sqrt{3}}{\sin u - \sqrt{3}\cos u} \\ y &= \frac{b}{\sin u - \sqrt{3}\cos u} \\ z &= b^3 k \sin^2 u \frac{(\sin u + \sqrt{3}\cos u)^2}{\sin u - \sqrt{3}\cos u} \end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

dargestellten Selbstdurchdringungskurve der Tangentenfläche können wir uns kurz fassen. Wie früher festgestellt, liegt diese in der Ebene $E_2$:

$$y = -\frac{b}{a\sqrt{3}}x,$$

welche mit der Ebene $E_1$ den Winkel $(180° - 2\varphi)$ einschließt, wo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a\sqrt{3}}.$$

Ferner ist sie *in bezug auf die yz-Ebene symmetrisch zur Doppelkurve in $E_1$ gebaut.* Daher fällt ihre Projektion auf die $yz$-Ebene mit derjenigen der eben erwähnten Doppelkurve, dargestellt durch Gleichung (94), zusammen.

Ihre Vertikalprojektion, deren analytischer Ausdruck sich durch Substitution des Wertes $y = -\frac{b}{a\sqrt{3}}x$ in die Gleichung (36) der Tangentenfläche ergibt, erhält man am einfachsten dadurch, daß man in der Gleichung (93) für den Aufriß der Doppelkurve der Ebene $E_1$ die Abszisse $x$ durch $(-x)$ ersetzt; sie lautet demnach:

$$9b^3kx^4 + 4\sqrt{3}ax^3z - 18a^2b^3kx^2 + 9a^4b^3k = 0. \qquad (102)$$

Die Gleichung der vorliegenden Doppelkurve in rechtwinkligen Koordinaten $\eta$ und $\zeta$, bezogen auf das System in der Ebene $E_2$ selbst, folgt am einfachsten aus der Gleichung (98) der Knotenlinie in der Ebene $E_1$, wenn in derselben die Abszisse $\eta$ durch $(-\eta)$ ersetzt wird. Sie heißt dann:

$$9b^2c^4k\eta^4 + 4c^3\eta^3\zeta - 6b^4c^2k\eta^2 + b^6k = 0. \qquad (103)$$

Diese Doppelkurve ist also ebenfalls *vom vierten Grade und rational oder unikursal.* Denn sie besitzt im unendlich fernen Punkt der $\zeta$-Achse einen *Spitzpunkt* mit der $\zeta$-Achse als dreifach zu zählender Asymptote, während die Gerade

$$\zeta = -\frac{9b^2ck}{4}\eta$$

vierte, reelle Kurvenasymptote ist.

Die vorliegende Kurve liegt ausschließlich im zweiten und vierten Quadranten und besteht aus zwei kongruenten, asymptotischen Ästen, welche die $\eta$-Achse als Doppeltangente in zwei Punkten mit den Abszissen

$$\eta = \pm \frac{b}{c\sqrt{3}}$$

berühren. Diese Berührungsstellen entsprechen den beiden in den doppelt gelegten Geraden der $xy$-Ebene liegenden Punkten $D_2$ und $D_4$:

$$x = \mp a, \qquad y = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}, \qquad z = 0$$

der Tangentenfläche, in welchen der Gesamtschnitt derselben mit dieser Koordinatenebene von der Geraden

$$y = -\frac{b}{a\sqrt{3}} x,$$

der Abszissenachse der Ebene $E_2$, in vier Punkten geschnitten wird, wie schon früher gefunden.

Nur derjenige Teil der Doppelkurve, welcher außerhalb des von den beiden zur $\zeta$-Achse parallelen Geraden

$$\eta = -\frac{b}{c\sqrt{3}}.$$

den Spuren des erzeugenden elliptischen Zylinders in der Ebene $E_2$, begrenzten Flächenstreifens verläuft, ist doppelt gelegte Spurkurve der reellen Tangentenfläche, während der innerhalb dieses Flächenstreifens asymptotisch zur $\zeta$-Achse liegende Kurvenzweig eine isoliert außerhalb der Tangentenfläche verlaufende Doppelkurve darstellt.

In gleicher Weise wie oben kann gezeigt werden, daß die beiden Kurvenpunkte

$$O_2\left(-\frac{b}{2c}, \frac{b^3k}{2}\right) \quad \text{und} \quad O_4\left(\frac{b}{2c}, -\frac{b^3k}{2}\right),$$

welche identisch sind mit den *Oskulationspunkten* $O_2(u = 150°)$ *und* $O_4(u = 330°)$ *der Raumkurve*, wie $O_1$ und $O_3$ *Zwickpunkte* der Doppelkurve sind, und den Kurvenast, gebildet durch die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte der reellen Erzeugenden der Tangentenfläche von demjenigen, längs welchem sich die konjugiert imaginären Erzeugenden durchschneiden, trennen.

## Zusammenfassung.

*Die Doppelkurve fünfzehnter Ordnung der Tangentenfläche zerfällt also* nach den oben durchgeführten Untersuchungen *in vier ebene Kurven*, von denen eine als geometrischer Ort sämtlicher Schnittpunkte je zweier paralleler Erzeugenden der Tangentenfläche *eine Kurve dritten Grades in der unendlich fernen Ebene des Raumes ist, während die drei andern Kurven vierter Ordnung sind*, welche in den drei auf der $xy$-Ebene senkrecht stehenden und zur $yz$-Ebene selbst symmetrisch verlaufenden Ebenen von den Gleichungen

$$x = 0\,, \quad y = \frac{b}{a\sqrt{3}}\,x\,, \quad y = -\frac{b}{a\sqrt{3}}\,x$$

liegen.

Die drei letzteren, sich ins Endliche erstreckenden Doppelkurven haben die Eigenschaft gemeinsam, daß sie aus zwei durch verschiedenartige Erzeugende der Tangentenfläche gebildeten Teilen bestehen, von denen der eine doppelt gelegte Spurkurve der reellen Tangentenfläche ist, während der andere eine ganz außerhalb derselben verlaufende *isolierte Knotenlinie* darstellt, gebildet durch die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte konjugiert imaginärer geradliniger Erzeugenden der Tangentenfläche.

Ferner sind die beiden, den Übergang dieser Teile vermittelnden Punkte einer jeden Doppelkurve, die *Zwickpunkte derselben, identisch mit je zwei der sechs Oskulationspunkte der zugehörigen Gratlinie*, die paarweise symmetrisch zueinander in bezug auf den Nullpunkt liegen.

Die dem imaginären Teile der Tangentenfläche angehörenden Doppelkurven, welche ganz innerhalb des die Raumkurve erzeugenden elliptischen Zylinders liegen, erstrecken sich *in drei Zügen asymptotisch* sowohl in der positiven als negativen Richtung *längs der z-Achse ins Unendliche*, wie jeder ebene Schnitt durch die Tangentenfläche:

$$z = C\,, \qquad \text{vorausgesetzt}\,|\,C\,| > \frac{b^3 k}{8}\,,$$

in deutlicher Weise zeigt, wo innerhalb der Spurellipse des elliptischen Zylinders *drei konjugierte Punkte als Spurpunkte dieser isolierten Doppelkurven* auftreten (Fig. XI).

*Der unendlich ferne Punkt der z-Achse*, welcher vierfacher isolierter Punkt der betrachteten Raumkurve ist, gehört sämtlichen vier Doppelkurven der Tangentenfläche an und zählt als dreifacher, als Spitzpunkt jeder der drei sich ins Endliche erstreckenden Doppelkurven. Er ist daher, wie auch aus dem Schnitt mit der $xz$-Ebene hervorgeht, in welchem er als isolierter sechsfacher Kurvenpunkt auftritt, ein isolierter, sechsfacher Punkt der Tangentenfläche.

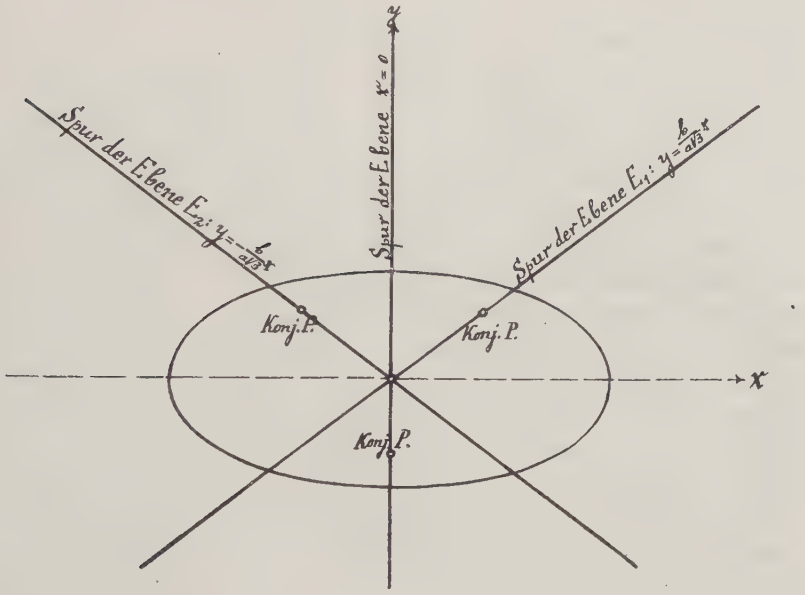



Fig. XI.

Spurpunkte der isolierten Doppelkurven in einer Ebene $z = + C > \frac{b^3 k}{8}$.

Um diesen Punkt analytisch zu untersuchen, projizieren wir ihn in den Nullpunkt vermittels der Substitutionen

$$x = \frac{x'}{z'}, \qquad y = \frac{y'}{z'}, \qquad z = \frac{1}{z'}.$$

Führt man diese Werte in der Flächengleichung (36) ein, so werden die niedrigst potenzierten Glieder der transformierten Gleichung zu:

$$b^6 x'^6 + 3a^2 b^4 x'^4 y'^2 + 3a^4 b^2 x'^2 y'^4 + a^6 y'^6.$$

Der unendlich ferne Punkt der $z$-Achse ist somit wirklich ein sechsfacher Punkt der Tangentenfläche. Sein Knotenkegel sechsten

Grades wird dargestellt durch obige gleich Null gesetzten Glieder, die in der Form geschrieben werden können:

$$(b^2x'^2 + a^2y'^2)^3 = 0, \quad \text{also}$$

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = 0, \quad \text{dreifach},$$

oder, zugleich aufs ursprüngliche Koordinatensystem bezogen:

$$y = \pm\frac{b}{a}ix, \quad \text{je dreifach.}$$

D. h. der unendlich ferne Punkt der $z$-Achse ist ein *isolierter sechsfacher Punkt der Tangentenfläche*, dessen Knotenkegel sechsten Grades in zwei je dreifach zu zählende konjugiert imaginäre Ebenen zerfällt, welche sich längs der $z$-Achse als reeller Doppelgeraden durchsetzen, und welche nach (76) identisch sind mit den beiden imaginären Asymptotenebenen der Tangentenfläche.

Nun erklärt sich auch, warum die unendlich ferne Doppelkurve der Tangentenfläche achter Ordnung, die den unendlich fernen Punkt der $z$-Achse als konjugierten Punkt enthält, nur vom dritten Grade ist. Diese Eigenschaft rührt daher, daß die Raumkurve an der unendlich fernen Stelle der $z$-Achse einen vierfachen isolierten Punkt aufweist, zu dem bei der Tangentenfläche noch ein Doppelpunkt hinzutritt, welcher gebildet wird durch den Schnitt zweier konjugiert imaginärer Erzeugenden derselben. Dies kommt in der Gleichung (76) für den Asymptotenkegel, welcher die unendlich ferne Ebene in derselben Kurve schneidet wie die Tangentenfläche selbst, dadurch zum Ausdruck, daß in ihr der Faktor

$$(b^2x^2 + a^2y^2)$$

enthalten sein muß. Dieser stellt, mit Null verglichen, die beiden konjugiert imaginären Ebenen

$$y = \pm\frac{b}{a}i \cdot x$$

dar, welche die unendlich ferne Ebene in zwei konjugiert imaginären Geraden schneiden, die einen reellen, isolierten Doppelpunkt an der unendlich fernen Stelle der $z$-Achse erzeugen. Die übrige Spurkurve des Asymptotenkegels in der unendlich fernen Ebene kann daher nur noch vom sechsten Grade sein und tritt als *Doppelkurve dritter Ordnung* auf.

## Lebenslauf.

Ich, Ernst Röthlisberger, geboren am 6. April 1895 in Bern, besuchte daselbst die Schulen und durchlief die Literarabteilung des städtischen Gymnasiums. Im Sommer 1914 erwarb ich mir das Reifezeugnis und wurde im Herbst desselben Jahres an der Universität Bern immatrikuliert. Seitdem widmete ich mich daselbst dem Studium der Mathematik, Physik, Astronomie und Versicherungslehre, das aber oft durch Grenzbesetzungsdienste und militärische Schulen empfindlich gestört wurde.

Zu meinen hochgeehrten Lehrern an der Universität zähle ich in dankbarer Erinnerung Herrn Prof. Dr. G. Huber, auf dessen Anregung und unter dessen Leitung die vorliegende Arbeit durchgeführt wurde, ferner die Herren Prof. Dr. J. H. Graf, sel., Prof. Dr. A. Forster, Prof. Dr. P. Gruner und Prof. Dr. Chr. Moser, die mir während der ganzen Studienzeit ihr wohlwollendes Interesse bekundet haben.